# О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВИХРЕВЫХ НИТЕЙ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ ВТОРОГО РОДА С ПОЛЕМ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ

*В.П.Галайко*

Высокие критические токи ($10^5 - 10^6$ *а/см*$^2$), достигаемые в настоящее время в сверхпроводниках второго рода с большими $\kappa$ [1], объясняются [2] наличием в таких сверхпроводниках различных дефектов кристаллической решетки или других неоднородностей, которые препятствуют вязкому движению вихревых нитей в смешанном состоянии [3] под действием силы Лоренца, создаваемой транспортным током. Роль таких "стопоров" вихревых нитей могут, в частности, играть дислокации (см. [4] и библиографию в обзоре [5]) и другие упругие неоднородности.

Взаимодействие вихрей с упругим полем определяется двумя основными факторами. В смешанном состоянии деформированного сверхпроводника из-за различия упругих модулей в сверхпроводящем и нормальном состоянии возникает дополнительная упругая энергия [4] (квадратичная по деформациям), обусловленная чередованием сверхпроводящих и нормальных областей в вихревой решетке. Наряду с этим, за счет вклада магнитной и кинетической энергии сверхпроводящего конденсата в давление. имеется также линейное по деформациям магнитноупругое взаимодействие. На атомных расстояниях вблизи линии дислокации оба вклада в энергию, вообще говоря, сравнимы по величине. Но в действительности, благодаря характерной для сверхпроводника макроскопической когерентности электронных состояний, упругое поле дислокации эффективно сглаживается на расстояниях порядка радиуса корреляции электронов, намного превышающего атомный радиус сердцевины дислокации. Поэтому основную роль должно играть линейное по деформациям магнитноупругое взаимодействие, в то время как квадратичные члены будут пренебрежимо малы*.

Для расчета этого взаимодействия достаточно определить изменение энергии вихревой решетки под влиянием упругого поля. Как известно [3], при больших $\kappa$ и не слишком сильных магнитных полях $H \ll H_{c2}$ вихри могут быть описаны (см. [3,6]) локальными уравнениями Лондонов [7]:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 4\pi N_s e \mathbf{v}_s\,; \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{v}_s = -(e/m)\,\mathbf{H}, \tag{1}$$

где $\mathbf{v}_s = (\nabla\chi - 2e\mathbf{A})/rm$ – скорость сверхпроводящего конденсата ($\hbar = c = 1$), $\chi$ – фаза параметра упорядочения, $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, $N_s$ – плотность сверхпроводящих электронов. В том же приближении энергия равна [3] :

$$E = \int dV \left[\frac{H^2}{8\pi} + \frac{N_s m v_s^2}{2}\right]. \tag{2}$$

Наличие упругого поля приводит к пространственному изменению плотности $N_s(\mathbf{r})$, которое в простейшем изотропном случае можно описать локально следующим образом:

$$\frac{N_\delta(\mathbf{r})}{N_s} = 1 + \gamma u_{ll}(\mathbf{r})\,; \quad \gamma = V\frac{\partial}{\partial V}(\ln N_s)_T \tag{3}$$

($u_{ll}$ – след тензора деформаций). При $T = 0$ в грязном сверхпроводящем сплаве ($l \ll \xi_0$, $l$ – длина свободного пробега, $\xi_0 \sim v_0/T_c$ – радиус корреляции в чистом сверхпроводнике) $N_s$ определяется следующими формулами [8]:

$$N_s = \pi N \tau_{tr}\,\Delta(0)\,; \quad \frac{1}{\tau_{tr}} = \frac{n m p_0}{\pi}\int\frac{do}{4\pi}|u(\theta)|^2(1-\cos\theta),$$

где $N$ и $n$ – плотности электронов и примесей, $\Delta(0) \sim T_c$ – щель БКШ при $T = 0$, $\tau_{tr}$ – транспортное время свободного пробега. Отсюда легко найти величину $\gamma$ [3]**:

$$\gamma = \frac{1}{3} + V\frac{\partial}{\partial V}\ln T_c\,. \tag{4}$$

Математически вихревые нити задаются как линии особенностей сверхпроводящей скорости $\mathbf{v}_s$ таких, что интеграл по бесконечно малому контуру $C_i$, охватывающему нить, равен:[3]:

$$\oint_{C_i} \mathbf{v}_s d\mathbf{r} = \frac{\pi}{m}.$$

Интегрируя с учетом этого условия первое слагаемое в формуле (2) по частям при помощи уравнений (1), получим [3]:

$$E = \frac{1}{8e} \sum_i \int dl_i H(\mathbf{r}_i), \tag{5}$$

где интегрирование совершается вдоль нити, сумма берется по всем нитям. Аналогично интегрирование первого уравнения (1) по бесконечно малому контуру, охватывающему нить, дает:

$$-\oint_{C_i} \frac{\partial H}{\partial \rho} \rho d\phi = \frac{\pi}{e\delta^2} \frac{N_s(\mathbf{r}_i)}{N_s}; \quad \frac{1}{\delta^2} = \frac{4\pi N_s l^2}{m}$$

($\delta$ – глубина проникновения поля). Отсюда с учетом формулы (3) следует, что в окрестности вихревой нити:

$$H \simeq \frac{1 + \gamma u_{ll}(\mathbf{r}_i)}{2e\delta^2} \ln \frac{\delta}{\rho_i} + H_{reg}, \tag{6}$$

где $\rho_i$ – расстояние от нити.

При подстановке формулы (6) в выражение (5) для энергии регулярное слагаемое $H_{reg}$ определяет энергию взаимодействия вихревых нитей, а первое слагаемое после обрезания на радиусе сердцевины вихря $\xi \sim \sqrt{l\xi_0}$ дает логарифмически большую собственную энергию вихрей [3], включающую в данном случае потенциал $U$ взаимодействия вихрей с упругим полем ($E = \epsilon_0 \sum_i \int dl_i + U$). Таким образом, окончательно потенциальная энергия вихревых нитей во внешнем упругом поле с логарифмической точностью имеет следующий вид:

$$U = \gamma \epsilon_0 \sum_i \int dl_i u_{ll}(\mathbf{r}_i), \quad \left(\epsilon_0 = \frac{\ln \kappa}{16(e\delta)^2}, \kappa \frac{\delta}{\xi}\right), \tag{7}$$

где $\epsilon_0$ – собственная энергия вихря на единицу длины, $\gamma$ – определяется формулами (3), (4).

Варьируя (7), легко найти силу, действующую на единицу длины нити в упругом поле:

$$\mathbf{F} = -\frac{\delta U}{\delta \mathbf{r}} = \gamma \epsilon_0 [\tau [\tau \nabla u_{ll}]] + \frac{\mathbf{n}}{R} u_{ll}].$$

Здесь $\tau$ и n — единичный вектор касательной и нормаль к вихревой нити, $R$ — радиус кривизны нити.

В качестве примера рассмотрим взаимодействие прямолинейной вихревой нити, расположенной в плоскости $x, y$ параллельно оси $x$, со стенкой краевых дислокаций, направленных по оси $z$ и лежащих на оси $x$ параллельно вектору Бюргерса $\mathbf{b}$. В этом случае $v_{\parallel}$ (см. [9]) и потенциал нити (7) на единицу длины ( $U = L v$, $L$ — длина нити) имеют, как легко проверить, следующий вид:

$$v_{\parallel}(x,y) = \frac{1/2-\sigma}{1-\sigma}\,\frac{b}{d}\,\frac{\operatorname{sh}^2(\pi y/d)}{\operatorname{ch}^2(\pi y/d)-\cos^2(\pi x/d)};$$

$$v = \frac{1/2-\sigma}{1-\sigma}\,\frac{\gamma\epsilon_0 b}{d}\operatorname{sign} y \qquad (8)$$

( $d$ — расстояние между дислокациями). Из предыдущего вытекает, что скачок потенциала (8) при $y = 0$ должен быть "размазан" на расстояниях порядка $\xi$ ***. Поэтому по порядку величины максимальная сила $F_c$ на единицу длины вихря равна:

$$F_c \sim \frac{\gamma\epsilon_0 b}{d\xi}\,\frac{1/2-\sigma}{1-\sigma} \sim \gamma \ln\kappa H_c^2 b \frac{\xi}{d}\,\frac{1/2-\sigma}{1-\sigma}.$$

Соответствующий критический ток $j_c$ определяется из условия равенства силы Лоренца $c^{-1}(j\,\Phi_0)$ ($\Phi_0 = \pi\hbar c/e$ — квант магнитного потока вихря) силе $F_c$. При этом максимальное значение $j_c$ достигается, очевидно, при $d \sim \xi$. Оценки показывают, что достижимые значения $j_{c_{max}} \sim 10^4 - 10^6$ $a/см^2$ при плотности дислокаций $10^{10} - 10^{12}$ $см^{-2}$, что дает разумные порядки величин.

Автор благодарен И.М.Лифшицу за обсуждение работы.

Харьковский
государственный университет
им. А.М.Горького

Поступило в редакцию
1 февраля 1968 г.

## Литература

[1] J.E.Kunzler, E.Buehler, F.S.L.Hsu, J.H.Wernick. Phys. Rev. Lett., 6, 89, 1961.
[2] P.W.Anderson. Phys. Rev. Lett., 9, 309, 1962.
[3] А.А.Абрикосов. ЖЭТФ, 32, 1442, 1957.
[4] W.W.Webb. Phys. Rev. Lett., 11, 191, 1963.
[5] K.J.van Gurp. J. de Phys., Suppl., 27, 51, 1966.
[6] В.П.Галайко. ФММ, 21, 496, 1966.
[7] H.London, F.London. Proc. Roy. Soc., A149, 71, 1935.

[8] А.А.Абрикосов, Л.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. Физматгиз, 1962.
[9] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория упругости. М., изд-во "Наука", 1965.

---

* Это обстоятельство не учитывается в работах [4,5], в которых линейные члены отбрасываются.

** Для большинства сверхпроводников $\gamma$ определяется, по-видимому, в основном производной $\partial T_c / \partial V$. Например, для олова $\gamma \sim 10$.

*** Этот вопрос нуждается в дополнительном исследовании, так как в грязных сплавах $v_{||}$ сглаживается на длине свободного пробега $l$. Однако в принятом приближении расстояние между вихревой нитью и дислокацией определяется с точностью до радиуса сердцевины вихря $\xi \sim l\sqrt{\xi_0/l} >> l$. Поэтому из осторожности здесь принята заниженна оценка тока $j_c$, отвечающая сглаживанию скачка (8) на длине $\xi$.