Письма в ЖЭТФ, том 17, вып. 3, стр. 167 – 171 *5 февраля 1973 г.*

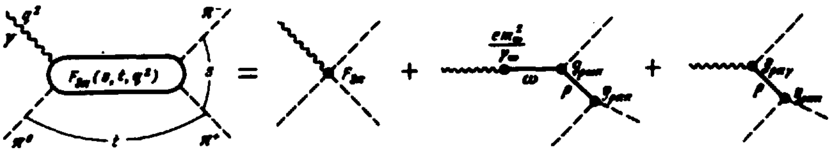
НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ВЕРШИНЫ $\gamma \to 3\pi$ И ПРОЦЕСС $e^+e^- \to \pi^0\gamma$

Ю. П. Малакян

1. Одним из интересных результатов в физике мягких пионов является установленная недавно Терентьевым [1] и Адлером и др. [2] низкоэнергетическая теорема для вершины $\gamma \to 3\pi$.

$$F_{3\pi} = F_\pi / ef^2 , \qquad (1)$$

где $F_{3\pi}$ – инвариантная функция в вершине $\gamma \to 3\pi$ нулевом пределе всех аргументов, F_π – аналогичная функция в вершине $\pi^0 \to 2\gamma$ в пределе $\mu \to 0$, μ – масса π-мезона, а $f = 83$ *мэв*. Экспериментальное подтверждение соотношения (1), когда F_π – заменена экспериментальным значением константы распада $\pi^0 \to 2\gamma$, т. е. когда $F_\pi(0) = F_\pi(\mu^2)$, будет означать существование некоторого внутреннего механизма, делающего этот распад динамически незапрещенным, в противоположность предсказанию наивной теории PCAC. Опыты для определения $F_{3\pi}$ были предложены в разных работах [1, 3]. Ясно, однако, что на эксперименте измеряется не $F_{3\pi}$, а $|F_{3\pi}(s, t, q^2)|^2$ и ситуация осложняется тем, что даже вблизи порога этих реакций ощутимый вклад дают поправки, связанные с обменом некоторых мезонов, и чтобы из этих данных извлечь значение $F_{3\pi}$ необходимо знать фазу интерференционных членов с резонансными вкладами. Оказывается, что эту фазу можно определить в процессе $e^+e^- \to \pi^0\gamma$. Запишем функцию $F_{3\pi}(s, t, q^2)$ в виде (обозначения см. на рисунке)



$$F_{3\pi}(s,t,q^2) = F_{3\pi} + \frac{2g_{\rho\pi\gamma}\,g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^3}\left[\frac{s}{m_\rho^2 - s} + (s\to u) + (s\to t)\right] +$$

$$+ \frac{2e g_{\rho\pi\pi}\,g_{\rho\omega\pi}}{\gamma_\omega m_\omega}\;\frac{q^2}{m_\omega^2 - q^2}\left[\frac{1}{m_\rho^2 - s} + (s\to u) + (s\to t)\right], \tag{2}$$

где константы g и γ_V связаны с соответствующими парциальными ширинами следующим образом (о всех экспериментальных данных см. [4]).

$$\Gamma_{\rho\pi\pi} = \frac{1}{3}\,\frac{g^2_{\rho\pi\pi}}{16\pi}\left(1 - \frac{4\mu^2}{m_\rho^2}\right)^{3/2} \tag{3а}$$

$$\Gamma_{\omega\to3\pi} = (m_\omega - 3\mu)^4 (m_\rho^2 - 4\mu^2)^{-2}(\mu^2/m_\omega)(g^2_{\rho\pi\pi}/16\pi)(g^2_{\rho\omega\pi}/4\pi)\,W(m_\omega),$$

$$W(m_\omega = 787\ \text{Мэв}) = 3{,}56 \tag{3б}$$

$$\Gamma_V = \frac{\alpha^2}{3}\,\frac{4\pi}{\gamma_V^2}\,m_V, \tag{3в}$$

$$\Gamma_{V\to\pi\gamma} = \frac{g^2_{V\pi\gamma}}{96\pi}\,m_V(1 - \mu^2/m_V^2)^3, \tag{3г}$$

где $V = \rho, \omega, \phi$. Для распада $\omega \to 3\pi$ использована модель GSW [5]. Вклад ϕ-мезона нигде учитывать не будем из-за малых констант связи. Ясно, что вблизи порога реакций мнимыми частями величин g и γ_V можно пренебречь[1)], так что следует говорить о знаке интерференционных членов. В предположении VDM для распада $\omega \to \pi^0\gamma$ имеет место $g_{\omega\pi\gamma} = e\,g_{\rho\omega\pi}/\gamma_\rho$, что хорошо выполняется при современных

[1)] Отметим, что при вычислении $\mathrm{Im}\, g_{\rho\to\pi\gamma}$ можно учесть только двухпионное промежуточное состояние и при выполнении (1) находим $\mathrm{Im}\, g_{\rho\to\pi\gamma} = -\,g_{\rho\pi\pi}F_{3\pi}/96\pi(m_\rho^2 - 4\mu^2)^{3/2}$, а отсюда получается нижняя граница распада $\rho\to\pi\gamma$: $\Gamma_{\rho\to\pi\gamma} \geqslant 12$ кэв.

экспериментальных данных ($g_{\rho\omega\pi}$ из (3б)). По $SU(3)$-симметрии имеем [6]:

$$g_{\rho\pi\gamma} = \frac{1}{3} g^D , \qquad g_{\omega\pi\gamma} = \frac{1}{3} g^D + \frac{1}{\sqrt{3}} g^S , \tag{4}$$

$$g_{\phi\pi\gamma} = \frac{1}{3} g^D - \frac{1}{\sqrt{6}} g^S .$$

Для $\omega\phi$ смешивания выбрано значение $\cos\theta = \sqrt{2/3}$. Хотя и (4) в настоящее время выполняются не совсем удовлетворительно, все же отсюда можно сделать вполне определенное заключение, что g^D и g^S имеют одинаковый знак, следовательно и $g_{\omega\pi\gamma}\, g_{\rho\pi\gamma} > 0$. По $SU(3)$-симметрии имеет место также соотношение $\operatorname{sign}\gamma_\omega = \operatorname{sign}\gamma_\rho$, так что у всех интерференционных членов одинаковый знак $\eta_{3\pi} = \operatorname{sign} \dfrac{g_{\rho\pi\gamma} g_{\rho\pi\pi}}{F_{3\pi}}$.

Рассмотрим теперь процесс $e^+e^- \to "\gamma" \to \pi^0\gamma$. Вершину виртуальный фотон $\to \pi^0$ + фотон запишем в виде:

$$F_\pi(q^2) = F_\pi + \frac{e g_{\rho\pi\gamma}}{\gamma_\rho m_\rho} \frac{q^2}{m_\rho^2 - q^2} + (\rho \to \omega) . \tag{5}$$

Сечение процесса выражается через $F_\pi(q^2)$ следующим образом:

$$\sigma_{e^+e^- \to \pi^0\gamma} = \frac{\alpha}{24} | F_\pi(q^2) |^2 \left(1 - \frac{\mu^2}{q^2}\right)^3 . \tag{6}$$

Интерференционные члены F_π с резонансными вкладами имеют знак величин $e g_{\rho\pi\gamma} / \gamma_V F_\pi (V = \rho, \omega)$. Однако легко видеть, что

$$\eta_{3\pi} = \eta = \operatorname{sign} \frac{e g_{V\pi\gamma}}{\gamma_V F_\pi} . \tag{7}$$

Так, формфактор π-мезона в реакции $e^+e^- \to "\gamma" \to \pi^+\pi^-$ при низких энергиях описывается формулой

$$F(q^2) = 1 - \frac{g_{\rho\pi\pi}}{\gamma_\rho} + \frac{g_{\rho\pi\pi}}{\gamma_\rho} \frac{1}{1 - q^2/m_\rho^2}, \; q^2 < 1\ \text{Гэв}^2$$

с $(g_{\rho\pi\pi}/\gamma_\rho) > 0$. Если теперь имеет место (1), то мы получим (7). Сечение (6) очень чувствительно к η в области $q^2 \sim 0{,}3 \div 0{,}4$ Гэв^2. Здесь мы приводим значения $\sigma_{e^+e^- \to \pi^0\gamma}$ для различных значений q^2 и $\eta = \pm 1$. Для $\Delta_V = | e g_{V\pi\gamma} / \gamma_V F_\pi m_V |$ использованы значения $\Delta_\rho = 1{,}15$ $\Delta_\omega = 0{,}7$.

$\sigma_{e^+e^- \to \pi^0\gamma} \cdot 10^{33}$ $см^2$

q^2, $Гэв^2$ / η	0,3	0,35	0,4	0,45
+ 1	0,54	0,8	1,16	2,3
– 1	0,046	0,16	0,35	1,07

Такие сечения доступны измерению уже в настоящее время.

2. Наличие вышеуказанной возможности определения знака интерференционных членов делает предпочтительным эксперимент прямого определения $F_{3\pi}$ в реакции $e^+e^- \to "\gamma" \to 3\pi$. Хотя и сечение этого процесса вблизи порога в самом благоприятном случае составляет всего 10^{-35} *см*^{2}, однако эта трудность разрешится со временем. Так как мы работаем вблизи порога, когда $q^2 \sim (3 \div 4\mu)^2$, то в (2) можно ограничиться первым приближением по q^2/m_V^2 ($V = \rho, \omega$). Тогда выражение для сечения имеет вид:

$$\sigma_{e^+e^- \to 3\pi} = \frac{a}{9(2\pi)^2} \frac{\mu^2}{2^8 W^3} (W - \mu)(W - 3\mu)^4 [1 + G(W)] \, |F(W)|^2$$

$$G(W)\Big|_{W = 3\mu} = 12 \tag{8}$$

$$F(W) = F_{3\pi} + \frac{6e g_{\rho\pi\pi} g_{\rho\omega\pi}}{\gamma_\omega m_\rho^2 m_\omega} \frac{q^2}{m_\omega^2 - q^2} +$$

$$+ \frac{3(W\mu + \mu^2)}{m_\rho^2} \left[\frac{2g_{\rho\pi\gamma} g_{\rho\pi\pi}}{m_\rho^3} + \frac{2e\, g_{\rho\omega\pi} g_{\rho\pi\pi}}{\gamma_\omega m_\omega m_\rho^2} \frac{q^2}{m_\omega^2 - q^2} \right],$$

где $W = \sqrt{q^2}$, (приближения в фазовом объеме в последнем интегрировании по E (E – энергия, скажем, π^+-мезона): $E^2 - \mu^2 \approx 2\mu(E - \mu)$ $W^2 - 2WE + \mu^2 \approx 4\mu^2$).

Приводим значения $\sigma_{e^+e^- \to 3\pi}$ в точке $W = 4\mu$ для случаев $\eta = \pm 1$[1] и $F_{3\pi} = 0$

$$\sigma^{(+)}_{e^+e^- \to \pi^0\gamma} \approx 0{,}87 \cdot 10^{-35}\ см^2,$$

$$\sigma^{(-)}_{e^+e^- \to \pi^0\gamma} = 0{,}85 \cdot 10^{-36}\ см^2.$$

При $F_{3\pi} = 0$

$$\sigma_{e^+e^- \to \pi^0\gamma} \approx 3{,}6 \cdot 10^{-36}\ см^2.$$

Таким образом, два независимых измерения полного сечения процесса $e^+e^- \to \pi^0\gamma$ при $q^2 \sim 0{,}3 \div 0{,}4$ *Гэв*^{2} и полного сечения $e^+e^- \to 3\pi$ вблизи порога дадут вполне определенный ответ для $F_{3\pi}$.

Автор благодарит Б.Л. Иоффе за ряд важных замечаний.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Поступила в редакцию
20 декабря 1972 г.

Литература

[1] М.В.Терентьев. Письма в ЖЭТФ, 14, 140, 1971.

[2] S. Adler et al. Phys. Rev., D4, 3497, 1971.

---

1) Отметим, что с учетом только $F_{3\pi}$ в (8) для $\sigma_{e^+e^- \to 3\pi}$ при $W = 4\mu$ получается значение $\sim 0{,}9 \cdot 10^{-36}$ *см*^{2}, на порядок меньше результата работы [7]. Однако, как нам кажется, в формуле (A20) работы [7] опущен множитель 1

[3] A. Zee. Phys. Rev., D6, 900, 1972.

[4] Rev. of Part. prop., Rev. of Mod. Phys., 43, part II, 1971.

[5] M.Gell-Mann, D.Sharp, W.Wagner. Phys. Rev. Lett., 8, 261, 1962.

[6] Нгуен Ван Хьеу. Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц, М., 1967, стр. 230.

[7] R. Aviv, A. Zee. Phys. Rev., D5, 2372, 1972.