Письма в ЖЭТФ, том 17, вып. 5, стр. 268 – 271 *5 марта 1973 г.*

РАСПАД НАЧАЛЬНОГО РАЗРЫВА В УРАВНЕНИИ КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА

А.В. Гуревич, Л.П. Питаевский

Построено асимптотически точное при $t \to \infty$ решение уравнения Кортевега – де Вриза для задачи о распаде начального разрыва.

Как известно, процессы в бездиссипативных средах с малой нелинейностью и дисперсией описываются уравнением Кортевега – де Вриза:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 , \qquad (1)$$

До настоящего времени, однако, с помощью (1) исследовалась, главным образом, эволюция возмущения, которое в начальный момент сосредоточено в конечной области пространства [1–3]. Цель настоящей работы состоит в решении задачи, в которой при $t = 0$ величина η испытывает в точке $x = 0$ конечный скачок, так что при $t = 0$ $\eta = \eta_0$ при $x < 0$ и $\eta = 0$ при $x > 0$. С течением времени разрыв превратится в расширяющуюся область, занятую колебаниями. При $\eta_0^{3/2} t >> 1$ размер этой области много больше длины волны колебаний, так что можно воспользоваться квазиклассическим методом Уитема [4]. Периодическое решение (1) имеет вид:

$$\eta(x, t) = \frac{2a}{s^2} \, dn^2 \left[\left(\frac{a}{6s^2} \right)^{1/2} (x - Vt), s \right] + \gamma$$

$$V = \frac{2a}{3s^2} (2 - s^2) + \gamma , \qquad (2)$$

где $dn(u, s)$ – эллиптическая функция Якоби с модулем s, $0 \leqslant s \leqslant 1$. Среднее по периоду значение $\bar{\eta}$ и волновой вектор k равны:

$$\bar{\eta} = \gamma + \frac{2a E(s)}{s^2 K(s)} , \qquad k = \frac{\pi}{K(s)} \left(\frac{a}{6 s^2} \right)^{1/2} \qquad (3)$$

где K и E – полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода.

Мы будем искать решение в виде (2), считая a, s и γ медленно меняющимися функциями x и t. Приближенные уравнения для этих функций согласно [4] удобно записать, введя три новые величины $r_3 > r_2 > r_1$:

$$r_2 - r_1 = 2a , \qquad \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1} = s^2 , \qquad r_1 + r_2 - r_3 = 2\gamma .$$

Уравнения для r_α имеют вид:

$$\frac{\partial r_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial r_\alpha}{\partial x} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3; \tag{4}$$

где v_α – определенные функции от r_α; нам понадобится только выражение для v_2:

$$v_2 = \frac{1}{6}(r_1 + r_2 + r_3) - \frac{2}{3} a \frac{(1 - s^2) K(s)}{E(s) - (1 - s^2) K(s)}.$$

Уравнения (4) не содержат параметра размерности длины, поэтому их решение при нашем начальном условии должно зависеть только от отношения $\tau = x/t$. Тогда (4) сводится к виду:

$$(v_\alpha - \tau) \frac{dr_\alpha}{d\tau} = 0.$$

Нужное нам решение получится, если положить

$$r_1 = \text{const}, \quad r_3 = \text{const}, \quad v_2 = \tau. \tag{5}$$

Осцилляции занимают в пространстве конечную область, причем на переднем фронте этой области, при $\tau = \tau_+$, должно быть $r_2 = r_3$, $s = 1$, т. е. $k = 0$. Иными словами, вблизи переднего фронта колебания разбиваются на совокупность солитонов. В силу непрерывности при $\tau = \tau_+$ должно быть $\bar{\eta} = 0$, откуда с помощью (3) находим, что $r_1 = 0$. На заднем же фронте при $\tau = \tau_-$ обращается в нуль амплитуда колебаний, т. е. $r_2 = r_1$, $s = 0$. В этой точке $\bar{\eta} = \eta_0$, откуда $r_3 = 2\eta_0$, $a = \eta_0 s^2$. Это означает, в частности, что амплитуда переднего солитона равна $2\eta_0$. С учетом сказанного имеем окончательно:

$$\eta(x, t) = 2\eta_0 \, dn^2\left[\left(\frac{\eta_0}{6}\right)^{1/2}\left(x - \frac{1 + s^2}{3}\eta_0 t\right), s\right] - \eta_0(1 - s^2), \tag{6}$$

причем $s(x/t)$ определяется уравнением:

$$\frac{1 + s^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{s^2(1 - s^2)K(s)}{E(s) - (1 - s^2)K(s)} = \frac{x}{\eta_0 t} = \frac{\tau}{\eta_0}. \tag{7}$$

Формулы (6) и (7) в параметрическом виде (параметр s) решают поставленную задачу, т. е. определяют $\eta(x, t)$ при $\eta_0^{3/2} t \gg 1$. Из (7) следует, что $\tau_- = -\eta_0$, а $\tau_+ = 2\eta_0/3$. При $\tau < \tau_-$ $\eta = \eta_0$, а при $\tau > \tau_+$ $\eta = 0$. Среднее значение $\bar{\eta}$ ведет себя при $\tau \to \tau_+$ как $\ln^{-1}\left[1/(\tau_+ - \tau)\right]$, так что на переднем фронте $\bar{\eta}$ стремится к нулю с бесконечной производной. Зависимость $\bar{\eta}$, k и s^2 от τ для единичного разрыва ($\eta_0 = 1$) показана на рис. 1, а зависимость η от x при $t = 50, 100$ на рис. 2. Видно, что расширение области колебаний с ростом t происходит за счет увеличения числа осцилляций, а длина волны меняется незначительно.

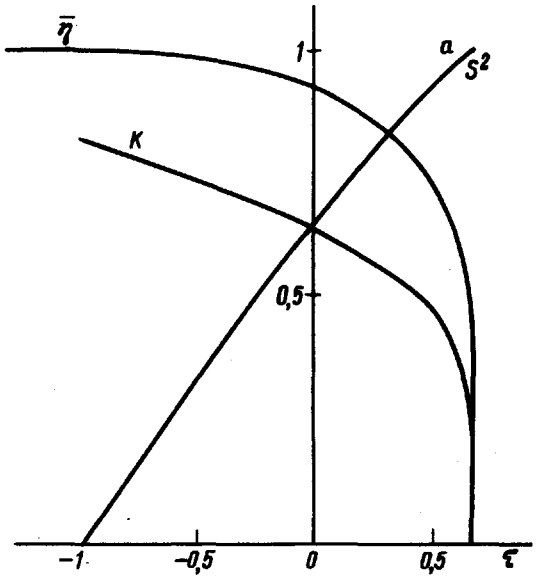

Рис. 1

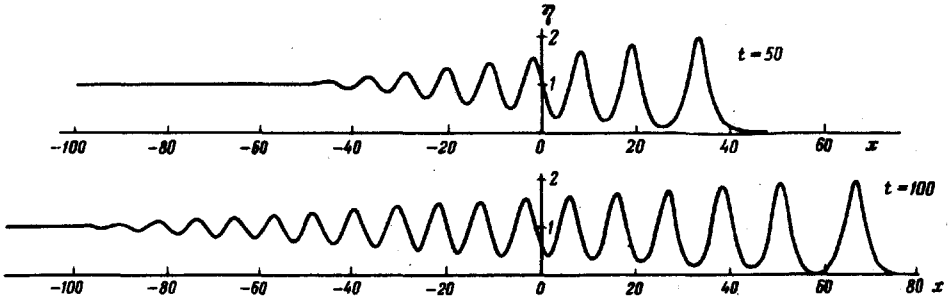

Рис. 2

Эволюция разрыва на основе линеаризованного уравнения (1) рассмотрена в [5]. Полученные там формулы описывают начальную стадию процесса при $\eta_0^{3/2} t \ll 1$. В дальнейшем процесс должен выйти на найденное выше асимптотическое решение, в котором эффекты дисперсии и нелинейности одного порядка. Экспериментальному исследованию распада малого разрыва в плазме посвящена работа [6]. Наблюдаемая картина качественно похожа на рис. 2.

Авторы благодарны В.Е.Захарову за полезное обсуждение.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
23 января 1973 г.

Литература

[1] В.И.Карпман. Phys. Lett., 20A, 708, 1967.

[2] C.S.Gardner, I. M.Greene, M.D.Kruskal, R.M.Miura. Phys. Rev. Lett., 16, 1095, 1967.

[3] N.Hershkowitz, T. Romesser, D.Montgomery. Phys. Rev. Lett., 29, 1586, 1972.

[4] G.B.Witham, Proc. Roy. Soc., A283, 238, 1965.

[5] H.Washini, T.Taniuti. Phys. Rev. Lett., 17, 996, 1966.

[6] B.J.Taylor, P.R.Baker, H.Ikezi. Phys. Rev. Lett., 24, 206, 1970.