Письма в ЖЭТФ, том 17, вып. 6, стр. 312 – 316 *20 марта 1973 г.*

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ В СВЕРХПРОВОДНИКАХ ВТОРОГО РОДА

М.Г. Кремлев

Предлагается метод расчета пределов устойчивости неидеальных сверхпроводников второго рода по отношению к скачкам потока, позволяющий учесть различное тепловое окружение, электромагнитное воздействие оболочки и другие эффекты.

В сверхпроводниках второго рода в магнитном поле проявляются характерные неустойчивости в виде хорошо известных экспериментаторам скачков потока, которые могут приводить к преждевременным переходам в нормальное состояние. Теоретическое исследование устойчивости проводилось, например, Уипфом [1], Шварцем и Бином [2], получившим критерии устойчивости в предположении полной адиабатичности процесса. Упрощенное решение [3], предполагающее, напротив, полную изотермичность внутри сверхпроводника, приводит к тому же критерию с незначительным отличием в численном коэффициенте. В настоящей заметке предлагается метод расчета устойчивости к скачкам потока, позволяющий учесть теплообмен внутри и вне сверхпроводника и ряд дополнительных явлений (например, магнетокалорический эффект), а также, что практически наиболее интересно, – электродинамическое воздействие окружающей нормальной оболочки.

Для вывода исходного уравнения примем обычное предположение, что характерное время диффузии магнитного поля в резистивном состоянии намного меньше времени температурной диффузии. Иначе, мы можем считать, что плотность тока всегда успевает устанавливаться на уровне, соответствующем данной температуре (полагаем пока $\frac{\partial j_k}{\partial H} = 0$)

Строго говоря, в таком виде наше предположение справедливо лишь для достаточно сильных и только положительных флуктуаций температуры, однако легко видеть, что при этом мы получим критерии устойчивости в худшем случае с некоторым запасом.

Рассмотрим плоский слой сверхпроводника толщиной $2b$ с начальным распределением тока (начальная температура $T = T_К$):

$$i = i_y = \begin{cases} -i_К(T_Н) & 0 < x < b \\ i_К(T_Н) & -b < x < 0 \,. \end{cases} \qquad (1)$$

Определяющим уравнением для температуры является обычное уравнение теплопроводности, которое мы преобразуем для малых возмущений θ:

$$c\frac{\partial\theta}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + i_y E_y(x) = \kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + i_К\int_0^x \mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}\,d\xi =$$

$$= \kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \mu_0 i_К\int_0^x d\xi\int_x^b\frac{\partial i_y}{\partial t}\,d\eta\,. \qquad (2)$$

При выборе пределов в первом интеграле мы учли, что $E(0) \equiv 0$, а во втором, $-\dfrac{\partial H(b)}{\partial t} \equiv 0$. Мы положили $B = \mu_0 H$, что также вполне обычно в подобных задачах. Чтобы выразить все члены уравнения через одну переменную θ, запишем, в соответствии с нашим предположением, связь тока и температуры в виде:

$$i = i_К(T_Н + \theta) = i_К(T_Н) + \frac{\partial i_К}{\partial T}\theta = i_К - \frac{i_К}{T_0}\theta \qquad (3)$$

Наконец, избавимся от двукратного интеграла в (2), дважды дифференцируя (2) по x:

$$c\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta = \kappa\frac{\partial^4\theta}{\partial x^4} - \frac{\mu_0 i_К^2}{T_0}\frac{\partial\theta}{\partial t}\,. \qquad (4)$$

Это уравнение и описывает развитие возмущения в линейном приближении. Легко видеть, что единственным параметром, определяющим устойчивость, является величина:

$$\beta = \frac{\mu_0 i_К^2 b^2}{c T_0}\,. \qquad (5)$$

Полагая, далее:

$$\theta = X\left(\frac{x}{b}\right)\exp\left(\lambda t\frac{\kappa}{c b^2}\right) \qquad (6)$$

получим:

$$X^{IV} - \lambda X^{II} - \lambda\beta X = 0\,. \qquad (7)$$

Итак, задача сведена к поиску спектра собственных чисел λ для уравнения (7)(неустойчивым состояниям соответствуют $\lambda > 0$). Определим необходимые граничные условия. Два условия возникнут в связи с переходом от (2) к (4):

$$E(0) \equiv 0 \quad и \quad c\frac{\partial}{\partial t}\theta(0) = \kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(0) \qquad или \quad \lambda X(0) = X''(0) \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H(b) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial E(b)}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda X'(1) = X'''(1). \tag{9}$$

Остальные два условия определяются характером теплообмена на границах слоя. Примем, например, условие адиабатичности (а также симметрии по x):

$$X'(0) = X'(1) = 0. \tag{10}$$

Характеристическое уравнение для (7) оказывается биквадратным и фундаментальная система (7) выражается через элементарные функции λ и β. Приравнивая детерминант, соответствующий системе (8 – 10), нулю, получаем следующие уравнения для определения зависимости $\lambda(\beta)$:

$$k_1^3 \operatorname{th} k_1 = k_2^3 \operatorname{tg} k_2 \tag{11}$$

$$k_1 = (\sqrt{\lambda^2/4 + \lambda\beta} + \lambda/2)^{1/2}, \quad k_2 = (\sqrt{\lambda^2/4 + \lambda\beta} - \lambda/2)^{1/2}. \tag{12}$$

Для основной (не имеющей нулей) компоненты возмущения зависимость $\lambda(\beta)$ изображается крайней левой кривой на рис. 1. Впервые $\lambda > 0$ возникает при $\beta = \pi^2/4$, что в точности соответствует критериям [1, 2]. При $\beta \to 3$, $\lambda \to +0$, что снова точно соответствует изотермическому рассмотрению [3] (неустойчивость антисимметричной компоненты сохраняется и при $\beta > 3$).

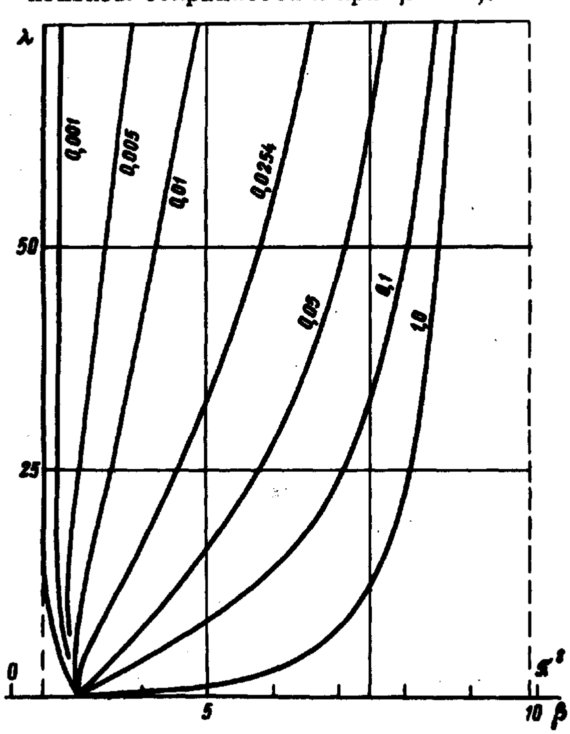

Рис. 1. Зависимости $\lambda(\beta)$ для основной компоненты возмущения при разных значениях d/b (цифры у кривой) и $a = 1$.

Пусть теперь сверхпроводник окружен оболочкой из нормального металла толщиной d. Уравнение (7) и условие (8), очевидно, сохраняются, причем в силу (3) мы можем под θ понимать и возмущение тока в сверхпроводнике. Оставим пока в силе и условия (10), не "используя" теплоемкость оболочки. Для тока i_n в нормальном металле имеем уравнение скин-эффекта:

$$\frac{\partial i_n}{\partial t} = \frac{1}{\mu_o \sigma_n} \frac{\partial^2 i_n}{\partial x^2} . \qquad (13)$$

На внешней границе $H = 0$, т. е. $\partial i_n / \partial x = 0$ и i_n можно записать как

$$i_n = i_n(b + d) \exp\left(\lambda t \frac{\kappa}{c b^2}\right) \mathrm{ch} \sqrt{\frac{\lambda}{a}} \left(\frac{x - b - d}{b}\right). \qquad (14)$$

Новый параметр a представляет собой отношение коэффициента диффузии магнитного поля в нормальном металле к коэффициенту температурной диффузии в сверхпроводнике:

$$a = \frac{c_s}{\kappa_s \sigma_n \mu_o} . \qquad (15)$$

Практически величина a может быть порядка единицы.

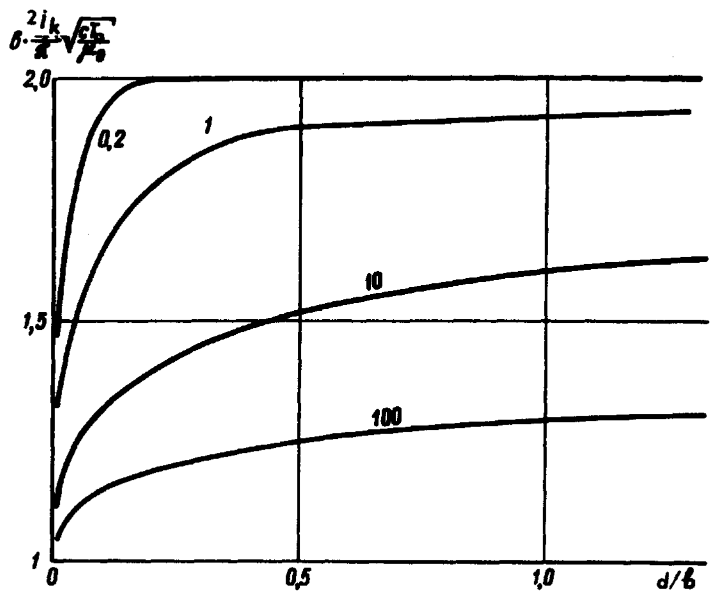

Рис. 2. Зависимость допустимой толщины сверхпроводника от толщины покрытия при разных a

Два недостающих условия выражают непрерывность E и H $(\partial E/\partial x)$ на границе:

$$E_n = \frac{i_n}{\sigma_n} = E_s \quad \text{или} \quad a\beta i_n(b) = X'(1) - \lambda X(1) \qquad (16)$$

$$\alpha\beta b \frac{\partial}{\partial x} i_n(b) = X'''(1) - \lambda X'(1) \qquad (17)$$

Детерминант новой системы (8, 10, 16, 17) также можно представить в виде обозримых функций λ, β, a и d. Зависимость $\lambda(\beta)$ для $a = 1$ и $d = \mathrm{const}$ изображены на рис. 1. Положение точки, где $\lambda = 0$ при всех d сохраняется, т. к. при $\lambda \to 0$ экранирующее влияние оболочки не сказывается. Однако уже при $d \geqslant \frac{8ab}{315}$ неустойчивыми вначале оказываются не быстрые ($\lambda >> 1$) скачки, а медленные ($\lambda \to 0$). Поэтому при таких толщинах необходимо учитывать теплоемкость оболочки (а для ряда задач – и теплоотвод в окружающую среду). Ясно, что положение точки, где $\lambda \to 0$, определяется условием $\beta^* = 3$, $a\beta^*$ (5) содержит полную теплоемкость всех компонент проводника. Эта точка будет, таким образом, с ростом толщины покрытия смещаться вправо (при наличии теплоотвода она уходит в бесконечность). Оказывается, однако, что верхняя ветвь кривой $\lambda(\beta)$ при $\lambda \to \infty$ во всех условиях проходит слева от линии $\beta = \pi^2$. Соответствующие возмущения описывают скачки потока, при которых поток не поступает в проводник извне, а лишь перераспределяется внутри него; воздействие оболочки становится здесь неэффективным. В качестве примера на рис. 2 приведены зависимости допустимой толщины сверхпроводника от толщины оболочки при разных a в предельном случае идеального теплоотвода ($X(1) = 0$).

Ясно, что в данную схему расчета можно включить дополнительные эффекты, величины которых выражаются через токи, температуру, а также учесть особенности теплоотвода во внешнюю среду, внутрь объема сверхпроводника, не занятого токами и т. д.

Институт высоких температур
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
15 января 1973 г.

Литература

[1] S. L. Wipf, Phys. Rev., 161, 404, 1967.

[2] P. S. Swartz, C. P. Bean, J. Appl. Phys., 39, 4991, 1968.

[3] M. N. Wilson, C. R. Walters et al. Brit. J. Appl. Phys., 3, 1517, 1970.