

Восстановление поляризационных состояний бифотонного поля

Ю. И. Богданов, Р. Ф. Галеев⁺, С. П. Кулик⁺, Г. А. Масленников⁺, Е. В. Морева*

Физико-технологический институт РАН, 117218 Москва, Россия

⁺Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 119899 Москва, Россия

*Московский инженерно-физический институт, 115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 июня 2005 г.

Обсуждается метод восстановления произвольного квантового состояния оптической системы в гильбертовом пространстве размерностью $d = 4$. Такие состояния можно реализовать при помощи коллинеарного, невырожденного по частоте режима генерации спонтанного параметрического рассеяния света. Метод апробирован на ряде поляризационных состояний бифотонного поля. Высокая точность восстановления состояний (свыше 99%) свидетельствует об адекватности предложенных процедур реконструкции квантового состояния системы.

PACS: 03.67.Hk, 42.25.Ja, 42.50.Dv

В последнее время в литературе широко обсуждаются методы реконструкции квантовых состояний. С одной стороны, свойства таких состояний являются предметом исследований в теории квантовой информации и квантовых вычислений. С другой стороны, это связано с растущими потребностями экспериментальной физики, которая в плотную подошла к манипуляциям с единичными квантовыми объектами. Речь идет о попытках контроля над тремя этапами эволюции квантовых систем: приготовлением, преобразованием и измерением. Квантово-оптические многоуровневые системы составляют широкий и очень привлекательный, с точки зрения передачи и хранения квантовой информации, класс состояний. В настоящее время, по всей видимости, можно утверждать о достижении практически полного контроля над оптическими двухуровневыми системами – поляризационными, пространственными и частотными состояниями отдельных фотонов. Подтверждением тому служат работающие устройства квантового распределения ключа, основанные на тех или иных способах кодирования информации с помощью отдельных фотонов.

Вместе с тем значительный интерес представляют и многоуровневые состояния поля [1]. Кроме чисто фундаментальных аспектов, увеличение размерности связано с повышением стойкости существующих квантовых систем распределения ключа (по отношению к некоторым классам атак на протоколы квантового распределения ключа) [2]. Недавно предложен и реализован метод полного контроля над приготовлением [3] и измерением [4, 5] трехуровневых поляризационных оптических систем. Активно ис-

следуются процедуры генерации и измерения других оптических трехуровневых состояний, реализованных на пространственных модах поля [6], трехплечевых интерферометрах [7], на перепутанных состояниях бифотонов [8]. Нефакторизованные состояния двух кубитов на основе бифотонов подробно исследовались в [9], где реализована полная статистическая реконструкция (матрицы плотности) исходного состояния. В работе [10], по-видимому, впервые сообщалось о приготовлении нефакторизованных триплетных состояний в четырехмерном гильбертовом пространстве на основе двухфотонного поля. Снятие вырождения по частоте использовалось в [11] для генерации синглетного состояния Белла в однопучковом (вырожденном по волновому вектору) режиме.

Данная работа посвящена обсуждению метода реконструкции произвольного состояния квантовой четырехуровневой системы, реализованной на поляризационных состояниях невырожденного по частоте двухфотонного поля.

1. Бифотоны как четырехуровневые системы. При воздействии лазерной накачки на кристалл без центра инверсии в результате спонтанного параметрического рассеяния (СПР) образуются пары коррелированных фотонов (бифотоны). Сумма частот родившихся фотонов в стационарных условиях равна частоте накачки, а направления разлета удовлетворяют условиям фазового синхронизма [12]: $\omega_1 + \omega_2 = \omega_p$, $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_p$. Вектор состояния бифотонного поля в произвольном чистом поляризационном состоянии имеет вид

$$|\Psi\rangle = c_1|H_1, H_2\rangle + c_2|H_1, V_2\rangle + c_3|V_1, H_2\rangle + c_4|V_1, V_2\rangle, \quad (1)$$

где

$$c_i = |c_i| \exp\{i\varphi_i\} \text{ и } \sum_{i=1}^4 |c_i|^2 = 1.$$

Здесь запись $|H_1, H_2\rangle$, например, обозначает, что в горизонтальной поляризационной моде находятся два фотона, а $|H_1, V_2\rangle$ – что фотон в моде “1” имеет горизонтальную поляризацию, а фотон в моде “2”¹⁾ – вертикальную. Если неполяризационные моды вырождены, то есть $|H_1\rangle = |H_2\rangle = |H\rangle$, $|V_1\rangle = |V_2\rangle = |V\rangle$, то состояние (1) преобразуется к виду

$$|\Psi\rangle = c_1|H, H\rangle + c_2|H, V\rangle + c_4|V, V\rangle, \quad (2)$$

что соответствует трехуровневой оптической системе, или кутриту [3–5]. Такой режим генерации бифотонов называется коллинеарным и частотно-вырожденным. Вырождение может быть снято разными способами. Первый состоит в выборе такой ориентации кристалла, при которой в результате СПР рождаются два фотона с разными частотами в одной пространственной моде. Второй – в определении времени прибытия фотонов с разной поляризацией, что можно осуществить с помощью линий задержки с поляризационной анизотропией. Поскольку состояние (1) представляется в виде разложения по четырем базисным состояниям, оно получило название *кукварт* (ququart), по аналогии с кубитом (qubit) и кутритом (qutrit) – состояниями двух- и трехуровневых систем, соответственно²⁾.

Поляризационные свойства двухмодового бифотонного поля полностью определяются матрицей когерентности, введенной Клышико [13]. Эта матрица, состоящая из 16 моментов четвертого порядка по полю, может быть получена путем прямого перемножения матриц когерентности обоих фотонов [14] и записана в следующем виде:

$$K_4 = \begin{pmatrix} A & E & F & G \\ E^* & B & I & K \\ F^* & I^* & C & L \\ G^* & K^* & L^* & D \end{pmatrix} \quad (3)$$

Диагональные элементы – действительные величины, характеризующие интенсивность корреля-

¹⁾ Традиционно моды “1” и “2” называются “сигнальной” и “холостой”.

²⁾ Эти термины, относящиеся к энергетическим состояниям, вообще говоря, не вполне корректны, поскольку никаких реальных “уровней” в этих системах нет. Речь идет о разложении состояний в ортонормированных базисах с двумя (кубит), тремя (кутрит) и четырьмя (кукварт) базисными векторами. Мы будем придерживаться этой уже сложившейся терминологии.

ций фотонов в двух частотно-угловых модах, с параллельными ($(K_4)_{11}, (K_4)_{44}$) или ортогональными ($(K_4)_{22}, (K_4)_{33}$) поляризациями:

$$\begin{aligned} A &= \langle a_1^+ a_2^+ a_1 a_2 \rangle = |c_1|^2, & B &= \langle a_1^+ b_2^+ a_1 b_2 \rangle = |c_2|^2 \\ C &= \langle b_1^+ a_2^+ b_1 a_2 \rangle = |c_3|^2 & D &= \langle b_1^+ b_2^+ b_1 b_2 \rangle = |c_4|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Недиагональные элементы являются комплексными величинами и определяют относительные фазы между базисными состояниями:

$$\begin{aligned} E &= \langle a_1^+ a_2^+ a_1 b_2 \rangle = c_1^* c_2, & F &= \langle a_1^+ a_2^+ b_1 a_2 \rangle = c_1^* c_3, \\ G &= \langle a_1^+ a_2^+ b_1 b_2 \rangle = c_1^* c_4, & I &= \langle a_1^+ b_2^+ b_1 a_2 \rangle = c_2^* c_3, \\ K &= \langle a_1^+ b_2^+ b_1 b_2 \rangle = c_2^* c_4, & L &= \langle b_1^+ a_2^+ b_1 b_2 \rangle = c_3^* c_4. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь a^+ , a – операторы рождения и уничтожения фотона в горизонтальной, b^+ , b – в вертикальной поляризационных модах. Для чистого состояния куквarta редуцированная поляризационная матрица плотности совпадает с матрицей когерентности (3).

Три действительных момента (4) и шесть комплексных (5) полностью определяют произвольное состояние кукварт. Таким образом, при измерении всех моментов может быть восстановлено исходное состояние матрицы плотности. Сделать это можно путем проецирования неизвестного состояния на некие заданные, как это имеет место при медицинской томографии³⁾. Оптимальная процедура томографии сводится к поиску минимального набора проекторов, по которым можно восстановить исходную матрицу плотности или вектор состояния.

В настоящей работе исследовались частотно-невырожденные коллинеарные состояния бифотонов, поэтому кукварт представлялся в виде

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = c_1|H_{\omega_1}, H_{\omega_2}\rangle + c_2|H_{\omega_1}, V_{\omega_2}\rangle + \\ + c_3|V_{\omega_1}, H_{\omega_2}\rangle + c_4|V_{\omega_1}, V_{\omega_2}\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Эксперимент. Экспериментальная установка для исследования произвольного кукварт (рис.1) состоит из двух блоков: “приготовительного” и “измерительного”.

2.1. Блок приготовления включает в себя кристалл йодата лития длиной $L = 1.5$ см и задающую кварцевую пластинку толщиной 987.7 мкм. Накачкой служит излучение Не–Cd-лазера с длиной волны

³⁾ Часто соответствующую процедуру называют квантовой томографией, а полный набор измерений, позволяющий произвести реконструкцию исходного состояния, – протоколом квантовой томографии.

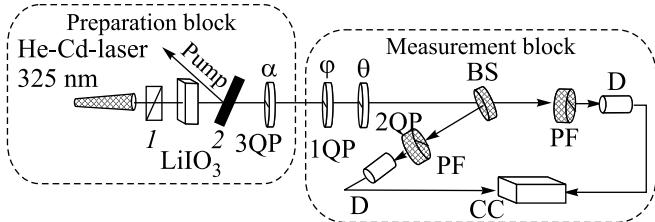


Рис.1. Установка для полной томографии куквартов: 1 – поляризатор, ориентированный горизонтально, 2 – фильтр, отражающий излучение УФ накачки, 3QP – задающая кварцевая пластинка, 1,2QP - кварцевые пластины, PF – поляризационный фильтр, D – фотодетектор, CC – схема совпадений. Обведены штриховой линией блок приготовления и измерения состояний

325 нм и горизонтальной поляризацией. Угол между волновым вектором накачки и оптической осью кристалла составляет 58° . При этом в кристалле генерируется состояние $|\Psi_0\rangle = |V_{\omega_1}, V_{\omega_2}\rangle$ (синхронизм первого типа). Задающая фазовая пластина преобразует вектор $|\Psi_0\rangle$ по правилу $|\Psi_{in}\rangle = G|\Psi_0\rangle$, где матрица

$$G = \begin{pmatrix} t_1 t_2 & t_1 r_2 & r_1 t_2 & r_1 r_2 \\ -t_1 r_2^* & t_1 t_2^* & -r_1 r_2^* & r_1 t_2^* \\ -r_1^* t_2 & -r_1^* r_2 & t_1^* t_2 & t_1^* r_2 \\ r_1^* r_2 & -r_1^* t_2^* & -t_1^* r_2^* & t_1^* t_2^* \end{pmatrix} \quad (7)$$

является прямым произведением матриц, описывающих поляризационные преобразования каждого из фотонов, составляющих бифотон. Она зависит от комплексных коэффициентов отражения и пропускания $r_j = i \sin \delta_j \sin 2\alpha$, $t_j = \cos \delta_j + i \sin \delta_j \cos 2\alpha$. Здесь δ_j – оптическая толщина пластины, α – угол между оптической осью пластины и вертикалью, а индекс $j = 1, 2$ относится к фотонам с частотами ω_1 и ω_2 , соответственно. В силу невырожденности частот оптическая толщина пластиинки $\delta_j = \pi(n_{ej} - n_{0j})h/\lambda_j$ (h – геометрическая толщина пластиинки) различается для сигнального и холостого фотонов. Меняя угол α , можно модифицировать матрицу G и, следовательно, получать различные состояния куквартов. Частоты фотонов выбираются произвольно в рамках связи $\omega_1 + \omega_2 = \omega_p$. В нашей схеме для выбора частоты одного из фотонов использовался узкополосный фильтр с максимальным пропусканием на длине волны 635 нм. При этом длина волны сопряженного фотона была равна 667.4 нм. Ширина спектра каждого из фотонов определялась длиной кристалла и составляла около 2 нм.

2.2. Блок измерения состоит из двух кварцевых пластинок, помещенных перед схемой Брауна–Твисса

со светофильтром, нечувствительным к поляризации, и поляризационными фильтрами в обоих плечах. Поляризационные фильтры выделяют вертикальную (V) поляризацию. Отсчеты в каждом плече регистрируются фотодетекторами, импульсы которых по даются на схему совпадений. Окно срабатывания схемы совпадений составляет $T = 1.7$ нс. Отличительной особенностью экспериментальной установки является отсутствие фильтров перед детекторами, благодаря чему каждый детектор “видит” фотоны с обеими частотами. Регистрируемым событием служит отсчет схемы совпадений, который происходит либо при регистрации первым детектором фотона с частотой ω_1 , а вторым – с частотой ω_2 , либо наоборот. Поскольку выделяется вертикальная компонента поляризации, то осуществляется проекция на состояние $|\Psi_{VV}\rangle \equiv |V_{\omega_1} V_{\omega_2}\rangle$. В рамках предложенного метода измерения толщина пластин может выбираться произвольной: в нашем эксперименте использовались пластиинки толщиной $h_1 = 821.5$ мкм и $h_2 = 712$ мкм.

3. Процедура измерения. Совместное действие двух пластиинок и поляризационных фильтров и лежит в основе процедуры проецирования исходного (вообще говоря, неизвестного) состояния. Квантовая томография произвольного состояния куквартра осуществляется путем регистрации парных совпадений фотоотсчетов детекторов для различных положений кварцевых пластиинок. Для восстановления исходного состояния необходимо выполнить не менее $d^2 = 16$ измерений проекций (где $d = 4$ – размерность гильбертова пространства). Математически это выражается в виде системы независимых линейных уравнений, связывающих комбинации мнимых и действительных частей моментов (4), (5) с числом регистрируемых событий. Получить такую систему можно путем выбора четырех различных положений первой пластиинки (1QP). Затем для каждого фиксированного угла поворота достаточно провести четыре измерения для различных углов второй пластиинки (2QP). В эксперименте, однако, проводились измерения для большего числа ориентаций второй пластиинки. Избыточное число измерений позволяет увеличить массив статистических данных для более точного восстановления матрицы плотности исходного состояния [5].

Преобразования, осуществляемые пластиинками, выражаются в виде

$$|\Psi_{out}\rangle_{kl} = G(\delta_1, \theta_k)G(\delta_2, \varphi_l)|\Psi_{in}\rangle, \quad (8)$$

где φ_l, θ_k – углы поворота первой и второй пластиин, соответственно. Число регистрируемых в эксперименте событий (парных совпадений фотоосчетов R_{kl}) с точностью до нормировки есть проек-

ция преобразованного состояния $|\Psi_{\text{out}}\rangle$ на состояние $|\Psi_{VV}\rangle$, определяемое ориентацией поляризационных фильтров. Эта проекция задается выражением $R_{kl} \propto |\langle\Psi_{VV}|\Psi_{\text{out}}\rangle_{kl}|^2$. Таким образом, измеряемое число совпадений в единицу времени для каждого испытания определяется углами поворота пластин 1QP, 2QP.

Задачей эксперимента являлось восстановление квантовых состояний куквартов, полученных для нескольких положений углов задающей пластинки. Конкретно, тестировались состояния, соответствующие ориентациям пластинки $\alpha = 0, 20^\circ$. Для каждого входного состояния были проведены четыре серии измерений. Каждая серия определяется углом ориентации пластины 1QP $\varphi = 90, 105, 120, 135^\circ$ при полном повороте пластины 2QP на 360° с шагом 10° , то есть включает 148 измерений. Зависимости нормированного числа совпадений за 30 с от ориентации пластины 2QP для состояния $\alpha = 20^\circ$ представлены на рис.2. При обработке экспериментальных данных

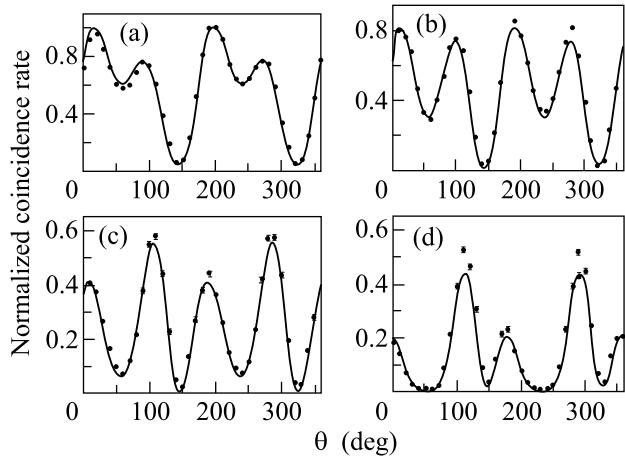


Рис.2. Графики зависимости нормированного числа совпадений от угла поворота второй кварцевой пластины (2QP): (a) – угол поворота первой пластины (1QP) соответствует $\varphi = 90^\circ$; (b) – угол $\varphi = 105^\circ$; (c) – угол $\varphi = 120^\circ$, (d) – угол $\varphi = 135^\circ$. Теоретическая линия построена сплошной кривой

из числа совпадений вычитались случайные $N_{\text{случ}}$, зависящие от числа усредненных единичных отсчетов каждого фотодетектора и ширины окна схемы совпадения, как $N_{\text{случ}} = \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle T$.

Для сравнения восстановленного квантового состояния с теоретическим используется понятие меры соответствия (fidelity). Для чистых состояний эту величину определяют следующим образом:

$$F = |\langle \Psi_{\text{exp}} | \Psi_{\text{theor}} \rangle|^2. \quad (9)$$

Численное значение F лежит в пределах от нуля до единицы. Если восстановленное состояние идентично теоретическому, то $F = 1$, если состояния ортогональны, $F = 0$. Для восстановления исходного состояния нами был использован метод корневой оценки, разработанный в [15, 16], хорошо зарекомендовавший себя при восстановлении состояний оптических кутритов [3–5]. В ходе обработки данных экспериментов можно выделить два типа ошибок, которые приводят к отличию восстановленного состояния от идеального: инструментальные и статистические. Первые вызваны весьма грубым учетом влияния случайных совпадений, погрешностями установки углов поворота пластин, неточностью определения оптической толщины пластин, конечной шириной спектра бифотонного поля и др. Второй тип ошибок связан со статистическими флуктуациями, обусловленными пуассоновским характером числа зарегистрированных событий. Как было показано в [5], влияние статистических флуктуаций пренебрежимо мало по сравнению с действием инструментальных погрешностей, если полное число зарегистрированных событий значительно превосходит так называемый объем когерентности. Численные расчеты показали, что оценка объема когерентности в данной серии экспериментов составляет в среднем 2140 событий и с гарантией 95% не превышает 4340 событий. В то же время полное число зарегистрированных отсчетов в эксперименте составляло около 280 тысяч. Таким образом, в рассматриваемом эксперименте ошибки при статистическом восстановлении состояний куквартов были практически обусловлены инструментальными погрешностями.

Результаты измерений состояний $|\Psi_{in}\rangle$ представлены в таблице. Высокие значения меры соответствия F подтверждают применимость предложенной процедуры томографии для восстановления состояний куквартов.

Заметим, что состояния $|\Psi_{in}\rangle$, приготовленные в эксперименте, не охватывают всего множества состояний (1), поскольку получены при раздельных SU2 преобразованиях каждого из фотонов, составляющих бифотон, фазовой пластинкой (7). Они представляют собой класс так называемых факторизуемых состояний, когда $|\Psi\rangle = |\Psi_{\omega_1}\rangle \otimes |\Psi_{\omega_2}\rangle$. Однако для проверки применимости общего метода реконструкции выбор данного класса состояний оказывается достаточным.

4. Заключение. Предложена процедура восстановления произвольного состояния квантовой оптической системы в гильбертовом пространстве размерностью $d = 4$. Процедура апробирована на числовых факторизуемых состояниях куквартов, получа-

| | | Вектор состояния | Fidelity |
|------------|---|--|----------|
| α | теория $ \Psi\rangle_{\text{теор}} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ | эксперимент $ \Psi\rangle_{\text{эксп}} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ | F |
| 0° | 0 | $-0.0555 - 0.0204i$ | 0.996 |
| | 0 | $-0.0059 + 0.005i$ | |
| | 0 | $-0.0425 + 0.0052i$ | |
| | 1 | 0.9973 | |
| 20° | 0.8097 | 0.8067 | 0.998 |
| | $-0.4568 - 0.3527i$ | $-0.4847 - 0.3304i$ | |
| | $-0.0103 - 0.0859i$ | $0.023 - 0.0554i$ | |
| | $-0.0316 + 0.0529i$ | $-0.0174 + 0.0413i$ | |

Примечание. Результат статистической обработки экспериментальных данных. Левый столбец соответствует углу кварцевой пластиинки (3QP), задающей входное (восстанавливаемое) состояние. Во второй столбец помещены теоретические (известные) компоненты приготавливаемого вектора состояния. Третий столбец содержит результат процедуры восстановления состояния. В четвертом столбце – мера соответствия экспериментальных значений теоретическим.

ющихся при унитарном преобразовании поляризационного состояния исходного бифотона с помощью фазовых пластин. Основная особенность предлагаемого способа реконструкции состоит в том, что квантовое состояние подвергается унитарным преобразованиям как цельный, неделимый объект, который можно передавать как по открытому пространству, так и по оптоволоконным линиям.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 02-16444а) и гранта Президента РФ по поддержке научных школ # 166.2003.02.

1. R. T. Thew, K. Nemoto, A. G. White, and W. J. Munro, Phys. Rev. A. **66**, 012303 (2002).
2. H. Bechmann-Pasquinucci and W. Tittel, Phys. Rev. A **61**, 062308 (2000).
3. Yu. Bogdanov, M. Chekhova, S. P. Kulik et al., Phys. Rev. Lett. **93**, 23503 (2004).
4. Ю. И. Богданов, Л. А. Кривицкий, С. П. Кулик, Письма в ЖЭТФ **78**, 804 (2003).
5. Yu. Bogdanov, M. Chekhova, L. Krivitsky et al., Phys. Rev. A **70**, 042303 (2004).
6. N. Langford, R. B. Dalton, M. D. Harvey, and J. L. O'Brien, Phys. Rev. Lett. **93**, 053601 (2004).
7. R. T. Thew, A. Acin, H. Zbinden, and N. Gisin, Quantum Information and Computation **4**, 93 (2004).
8. J. C. Howell, A. Lamas-Linares, and D. Bouwmeester, Phys. Rev. Lett. **88**, 030401 (2002).
9. D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro, and A. G. White. Phys. Rev. A **64**, 052312 (2001).
10. Y. H. Kim, S. P. Kulik, and Y. Shih, Phys. Rev. A **63**, 060301 (2001).
11. А. В. Бурлаков, С. П. Кулик, Ю. И. Рытиков, М. В. Чехова, ЖЭТФ **122**, 738 (2002).
12. Д. Н. Клышко, Фотоны и нелинейная оптика, М.: Наука, 1980.
13. Д. Н. Клышко, ЖЭТФ **111**, 1955 (1997).
14. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, М: Наука, 1973.
15. Ю. И. Богданов, Основная задача статистического анализа данных: корневой подход, М.: МИЭТ, 2002; Yu. I. Bogdanov, physics/0211109.
16. Ю. И. Богданов, Оптика и Спектроскопия **96**, 735 (2004).