ЗАТУХАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН В ПЛАСТИНЕ С ШЕРОХОВАТЫМИ СТЕНКАМИ

Ф Г.Басс, В.Д.Фрейлихер, И.М.Фукс

Неровности поверхности тонкой пленки могут оказывать существенное влияние на спектр различного сорта квазичастиц (электронов, фононов и т.д.), приводя к сдвигу и расширению их энергетических уровней. Это уширение спектра по своей природе аналогично уменьшению фазовой скорости и появлению затухания нормальных волн, распространяющихся в шероховатом волноводе, образованном двумя бесконечными поверхностями $z = \zeta_1(\mathbf{r})$ и $z = a + \zeta_2(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = \{x, y\}$, $\{x, y, z\}$ - декартовы координаты, $\zeta_1(\mathbf{r})$ и $\zeta_2(\mathbf{r})$ – случайные функции с нулевым средним.

Как в том, так и в другом случае задача сводится к решению уравнения Гельмгольца для волновой функции ψ (или скалярного потенциала в случае волновода)

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0 \qquad (1)$$

с учетом конкретных граничных условий на поверхностях ζ_1 и ζ_2. Здесь мы рассмотрим простейший случай нулевых граничных условий Дирихле, когда $\psi(z = \zeta_1) = \psi(z = \zeta_2 + a) = 0$. Для электронов, например, такому граничному условию соответствует бесконечно высокий потенциальный барьер на границе пленки; для фононов это означает, что тонкая пленка находится в вакууме, или, другими словами, является акустическим волноводом с абсолютно мягкими стенками.

Разлагая эти граничные условия в ряд по ζ_1, ζ_2 и производя усреднение $<...>$ по ансамблю реализаций ζ_1, ζ_2, получим для среднего поля $<\psi>$ и флюктуационной составляющей ϕ следующие соотношения, выполняющиеся при $z = 0$ и $z = a$:

$$<\psi> + <\zeta\frac{\partial\phi}{\partial z}> = 0; \quad \phi + \zeta\frac{\partial<\psi>}{\partial z} = 0. \qquad (2)$$

С помощью формулы Грина получим из (2) эффективные нелокальные граничные условия для среднего поля на плоскостях $z = 0$ и $z = a$:

$$<\psi(\mathbf{R})>\Big|_{z=0,a} = \pm\frac{\sigma^2}{4\pi}\int \frac{\partial^2 G_0(\mathbf{R},\mathbf{R}')}{\partial z\,\partial z'}\Big|_{z=z'=0,a} W(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial<\psi(\mathbf{R}')>}{\partial z'}\Big|_{z'=0,a} d^2\mathbf{r}' \qquad (3)$$

Здесь $\sigma^2 = \langle\zeta_1^2\rangle = \langle\zeta_2^2\rangle$; $\sigma^2 W(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle\zeta_1(\mathbf{r})\zeta_1(\mathbf{r}')\rangle = \langle\zeta_2(\mathbf{r})\zeta_2(\mathbf{r}')\rangle$; $\langle\zeta_1\zeta_2\rangle = 0$; $\mathbf{R} = \{\mathbf{r}, z\}$; $G_0(\mathbf{R},\mathbf{R}')$ – функция Грина плоского невозмущенного волновода с абсолютно мягкими стенками. Знак плюс относится к $z = 0$, минус – к $z = a$. Формулы (3) справедливы только для случая так называемых некритических частот, т.е.таких, для которых

$$\frac{ak}{\pi} = N + \epsilon, \; N = \left[\frac{ak}{\pi}\right]$$

ϵ – параметр некритичности; $0 < \epsilon < 1$. Если $\epsilon = 0$, то на ширине волновода укладывается целое число полуволн и G_0 обращается в бесконечность.

В дальнейшем для простоты будем считать, что $\zeta_i = \zeta_i(x)$ и рассматривать двумерное уравнение Гельмгольца. Тогда решение (1) с граничными условиями (3) можно искать в виде:

$$\langle\psi(x,z)\rangle = (c_1 e^{iqz} + c_2 e^{-iqz}) e^{ix\sqrt{k^2 - q^2}}. \qquad (4)$$

Подставив (4) в (3), получим для определения c_1 и c_2 однородную систему уравнений. Требование равенства нулю ее определителя приводит к следующему дисперсионному уравнению для определения собственных чисел q_n:

$$\delta q_n = q_n^{\circ} \frac{k\sigma^2}{a\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{ctg}(ak\sqrt{1-t^2})\,\widetilde{W}(t+a_n)\,dt \; -$$

$$- \frac{i\sigma^2\pi^2}{a^4k^2} q_n^{\circ} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\nu^2}{\beta_\nu} [\widetilde{W}(\beta_\nu + a_n) + \widetilde{W}(\beta_\nu - a_n)], \quad n = 1, 2 \ldots \qquad (5)$$

Здесь $q_n^{\circ} = n\pi/a$ – собственные числа невозмущенного волновода, поправки к ним $\delta q_n = q_n - q_n^{\circ}$ предполагаются малыми по сравнению с расстоянием между уровнями $|\delta q_n| << q_n^{\circ} - q_{n-1}^{\circ}$; $\widetilde{W}(t)$ – преобразование Фурье от корреляционной функции; $\beta_\nu = \sqrt{1 - (\nu^2\pi^2/a^2k^2)}$, $a_n = \sqrt{1 - (q_n^2/k^2)}$.

Видно, что все δq_n имеют мнимую часть, т.е. даже те волны, которые являются распространяющимися в гладком волноводе (для них $n\pi/ak < 1$) приобретают при наличии возмущения границ конечное затухание (квантовые уровни квазичастиц уширяются). Вид суммы, входящей в (5), показывает, что это затухание обусловлено преобразованием волны с данным номером n во все остальные распространяющиеся моды. Сдвиг уровней ($\mathrm{Re}\,\delta q_n$) обусловлен преобразованием в неоднородные (нераспространяющиеся) волны.

Если радиус корреляции l велик по сравнению с длиной волны ($kl >> 1$), то $\tilde{W}(t)$ – "острая" функция. При выполнении условия $l \gg \Lambda_n$, где $\Lambda_n = a(q_n^{\circ}/\beta_n) = a\,\mathrm{tg}\,\psi_n$ – длина цикла для данной моды, т.е. расстояние между двумя последовательными отражениями (ψ_n – угол скольжения) в сумме (5) при любом N существенным оказывается лишь член с $\nu = n$. Тогда при гауссовой функции корреляции, например, решение дисперсионного уравнения имеет вид:

$$\delta q_n = \frac{k\sigma \sin\psi_n}{a\sqrt{2\pi}} - iO(e^{-(kl)^2}) \quad \text{при} \quad \frac{\sigma^2}{a^2}kl >> 1,$$

$$\delta q_n = \frac{k\sigma^2 \sin^3\psi_n}{a^2\cos^2\psi_n}[1 - i\cos\psi_n\sqrt{\pi}kl] \quad \text{при} \quad \frac{\sigma^2}{a^2}kl >> 1. \qquad (6)$$

При рассмотрении многомодового волновода $N >> 1$ (толщина пленки много больше длины волны) дисперсионное уравнение также существенно упрощается. В этом случае, если $l << \Lambda_n$, сумму, входящую в (5), можно заменить интегралом, в результате чего получаем:

$$\delta q_n = -i\,\frac{1 + V(\psi_n)}{a}, \qquad (7)$$

где $V(\psi_n)$ – коэффициент отражения плоской волны от полупространства, ограниченного шероховатой плоскостью [1].

Заметим, что к формуле (7) можно прийти, вычисляя $\langle\psi_n(\mathbf{R})\rangle$, как результат последовательных отражений нормальной волны с эффективным коэффициентом отражения $V(\psi)$ [2,3]. Из вышеизложенного видно, что такой метод пригоден лишь для достаточно широких волноводов ($ak >> 1$), причем необходимо, чтобы радиус корреляции неровностей был мал по сравнению с длиной цикла ($l << \Lambda_n$).

Из-за приближенного характера эффективных граничных условий (3) формула (7) описывает затухание среднего поля лишь на расстояниях, удовлетворяющих неравенствам: $L(k^2\sigma^4/al)q_n^{\circ} << 1$ в случае $kl << 1$ и $L[(k\sigma)^4/a]\sin^4\psi_n << 1$ в случае $kl >> 1$. Видно, что если $(\sigma/l)^2 << 1$

(при $kl \ll 1$) или $(k_z \sigma)^2 \ll 1$ (при $kl \gg 1$), эти расстояния значительно превышают длину $L_{эф} \sim (\mathrm{Im}\,\delta q_n)^{-1}$, на которой затухает среднее поле.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Украинской ССР

Поступило в редакцию
17 апреля 1968 г.

Литература

[1] Ф.Г.Басс. Изв.высш.уч.зав., Радиофизика, 4, 476, 1961.
[2] Ю.П.Лысанов. Акустический журнал, 12, 489, 1966.
[3] C.S.Clay, J. Acoust. Soc. Amer., 36, 833, 1964.