Письма в ЖЭТФ, том 17, вып. 7, стр. 389 – 394. *5 апреля 1973 г.*

ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ЗАТУХАНИЕ ЛАНДАУ

Р. З. Сагдеев, В. Д. Шапиро

1. Наличие сколь угодно слабого поперечного магнитного поля в линейной теории приводит к парадоксу об исчезновении затухания, так как вместо непрерывного резонанса Ландау $\delta(\omega - kv)$ возникают дискретные резонансы $\delta(\omega - n\omega_H)$, где $\omega_H = eH/mc$, а $n = \pm 1, \pm 2$ [1]. Этот парадокс, в частности, устраняется при правильном предельном переходе с учетом того, что по мере уменьшения H, в конце концов, ω_H становится меньше $1/\tau_0$ ($\tau_0 = \sqrt{m/eEk}$ – период колебаний захваченных частиц, E – амплитуда электрического поля), и дискрет-

ные резонансы перекрываются $\Delta\omega \sim 1/\tau_0 > \omega_H$. При этом становятся существенными нелинейные эффекты в затухании.

Как известно, если $\omega_H = 0$, для волны конечной амплитуды затухание Ландау с декрементом γ_L, определяемым линейной теорией, имеет место только при достаточно малых временах $t < \tau_0$, и при условии $\gamma_L \tau_0 << 1$ не происходит заметного поглощения волны [2 – 4]. Магнитное поле меняет функцию распределения частиц в резонансной области за характерное время $\tau^{REL} \sim (1/\omega_H)\sqrt{eE/kmv_T^2}$ (v_T – тепловая скорость), так что "плато" не устанавливается, и можно ожидать, что ассимптотический декремент затухания определяется интерполяционной формулой вида [5]:

$$\gamma = \gamma_L \left(1 + \frac{\tau^{REL}}{\tau_0}\right)^{-1} . \qquad (1)$$

Наибольший интерес представляет случай настолько слабых полей, что $\epsilon = \tau_0/\tau^{REL} << 1$. Уже при таких полях, как показано ниже, наряду с (1) имеет место дополнительное затухание поля, связанное с ускорением захваченных частиц вдоль фронта волны. Соответствующий декремент оказывается растущим со временем, а его максимальное значение может существенно превысить γ_L.

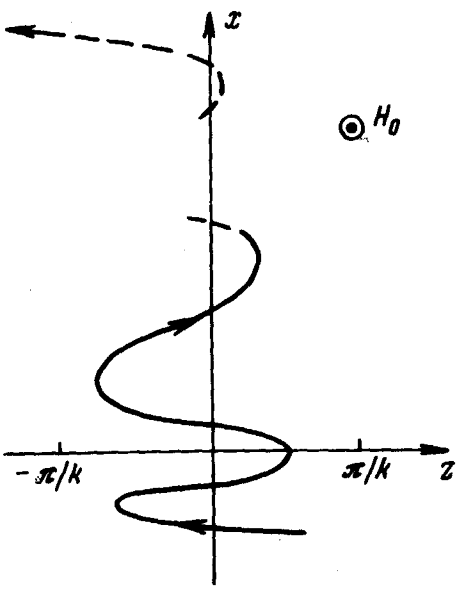

Рис. 1

2. В магнитном поле захваченные волной частицы, энергия которых $\mathcal{E} < eE/k$, отражаясь от границ потенциальной ямы, заворачиваются магнитным полем и ускоряются в перпендикулярном направлении, как это показано на рис. 1. Скорость частиц в этом направлении растет линейно со временем:

$$v_x = v_x(0) + \frac{\omega}{k}\omega_H t , \qquad (2)$$

до тех пор, пока Лоренцова сила $\frac{e}{c} v_x H$ не превысит отражающую силу – eE_z, в результате чего частица "вывалится" из ямы.

Движение частиц в направлении распространения волны определяется из интеграла энергии:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 - \frac{eE}{k}\cos kz' + m\omega_H \int_0^t v_x \frac{dz'}{dt}\,dt = \mathcal{E}, \qquad (3)$$

где мы представили электрическое поле волны в виде $E(t, z) = E\sin kz'$, $z' = z - \frac{\omega}{k}t$. Магнитное поле приводит к смещению точек поворота захваченной частицы:

$$z'_{\pm} = \pm z_0 + \delta z, \ \cos k(z_0 + \delta z) - \cos k(z_0 - \delta z) = \frac{2m\omega_H}{eE} k z_0 v_x(t) \qquad (4)$$

и при $t \sim \tau^{TR}$, когда для одной из точек поворота $\cos k(z_0 \pm \delta z) = -1$, частица уходит из ямы. Из (4) имеем следующую оценку для τ^{TR}:

$$\tau^{TR} \sim \frac{1}{\omega\,\omega_H^2 \tau_0^2} \approx \tau_0 \frac{1}{\epsilon^2 \mu}, \qquad (5)$$

параметр $\mu = \frac{\omega}{k v_T^2}\sqrt{\frac{eE}{km}} << 1$, что соответствует малому изменению равновесной функции распределения на интервале скорости $\sim 1/k\tau_0$. За это время поперечная энергия частиц возрастает до большой величины $\sim m v_T^2 \frac{1}{\epsilon^2}$.

Ускорение захваченных частиц в перпендикулярном направлении происходит за счет энергии волны и при временах $t \lesssim \tau^{TR}$ приводит к затуханию ее амплитуды с растущим во времени декрементом[1]. Декремент затухания на захваченных частицах находится из уравнения:

$$\frac{\gamma^{TR}}{4\pi} E^2 + \frac{dW^{TR}}{dt} = 0,$$

$$W^{TR} = \frac{m}{\lambda}\int dz(0)\,dv_x(0)\,dv_z(0) f_0[v_x^2(0) + v_z^2(0)]\left(\frac{\omega}{k}\frac{dz'}{dt} + \frac{1}{2}v_x^2\right) - \qquad (6)$$

– усредненная по длине волны энергия захваченных частиц, $f_0(v_x^2 + v_z^2)$ – их равновесная функция распределения. Изменение продольной энергии захваченных частиц приводит к быстрым осцилляциям декремента, затухающим при $t >> \tau_0$. Если $t > \tau_0/\epsilon$, основным в W^{TR} становится изменение поперечной энергии частиц и из (6) имеем тогда простую формулу для γ^{TR}:

$$\gamma^{TR} = -\frac{8}{\pi}\epsilon^2\mu\sqrt{\frac{E(0)}{E}}\frac{\omega^3}{k} t \int dv_x f_0\left(v_x^2 + \frac{\omega^2}{k^2}\right) = \frac{16}{\pi^2}\gamma_L\sqrt{\frac{E(0)}{E}}\epsilon^2\frac{t}{\tau_0} - \qquad (7)$$

– для максвелловской функции распределения.

---

[1] Аналогичный механизм ускорения ионов в поперечном магнитном поле возможен и на фронте ударной волны (см. [6]).

Существенно, что в отличие от линейного затухания Ландау, которое меняет знак при замене производной $\partial f_0 / \partial v_z (v_z = \omega/k)$, рассмотренный механизм всегда приводит к поглощению волны.

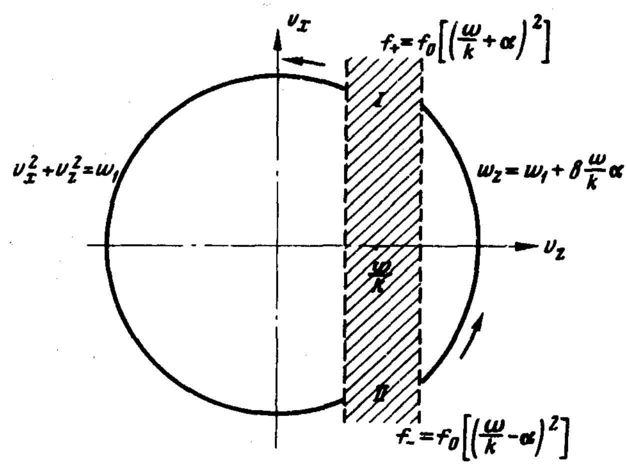

Рис. 2

3. Пролетные частицы в магнитном поле движутся по траекториям, показанным на рис. 2. При $\epsilon << 1$ движение частиц в резонансной области $v_z \approx \omega/k$ происходит по траектории маятника с медленно изменяющейся энергией:

$$F\left(\xi, \frac{1}{\kappa}\right) = F\left(\xi_0, \frac{1}{\kappa}\right) + \frac{K\left(\frac{1}{\kappa}\right)}{\tau_0} \int_{t_0}^{t} \frac{\kappa}{K\left(\frac{1}{\kappa}\right)} dt,$$

$$\xi = \frac{kz'}{2}, \quad \kappa^2 = \frac{\mathcal{E} + \frac{eE}{k}}{2eE/k}, \quad \kappa E\left(\frac{1}{\kappa}\right) - 1 = -\frac{\pi}{4} \frac{v_{x0}}{\sqrt{eE/km}} \omega_H (t - t_0) \tag{8}$$

$F(\xi, \kappa)$ – эллиптический интеграл первого рода, $K(\kappa)$, $E(\kappa)$ – полные эллиптические интегралы. В формуле для $\kappa(t)$ учтено, что при $\mu << 1$ поперечная скорость частицы за время пролета резонансной области τ_0/ϵ остается приближенно постоянной $v_x \approx v_{x0}$. Вне резонансной области частицы движутся по линиям постоянной энергии $v_x^2 + v_z^2 = \text{const}$. Сшивая решение в этих двух областях, имеем соотношения, связывающие v_{x0} и t_0 с начальными значениями скорости частицы $v_x(0)$, $v_z(0)$:

$$v_{x0} = v_x(0)\cos\omega_H t_0 + v_z(0)\sin\omega_H t_0,$$

$$\frac{\omega}{k} \pm \alpha = v_z(0)\cos\omega_H t_0 - v_x(0)\sin\omega_H t_0, \tag{9}$$

$\alpha = (4/\pi)\sqrt{eE/km}$, знак $\pm$ относится к резонансным областям I, II, для которых $v_{x0} > 0$, $v_{x0} < 0$. Изменение энергии пролетной частицы при прохождении через резонансную область $\left(\frac{m}{2}\right)\Delta(v_x^2 + v_z^2) = \mp 4m\left(\frac{\omega}{k}\right)a$.

Таким образом, нелинейное затухание волны на пролетных частицах – разностный эффект, связанный с различием функций распределения в областях I и II :

$$f = f_0\left[v_{x0}^2 + \left(\frac{\omega}{k} \pm a\right)^2\right].$$

Декремент затухания γ^{UTR} определяется из закона сохранения энергии и при временах t, удовлетворяющих условию $\tau_p/\epsilon < t < \pi/\omega_H$, равен

$$\gamma^{UTR} = \frac{64}{\pi^3} I \gamma_L \epsilon \exp\left[-\frac{m}{2T}\frac{\omega^2}{k^2}\mathrm{tg}^2\frac{\omega_H t}{2}\right], \tag{10}$$

$$I = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 \frac{d\kappa}{\kappa^2} K(\kappa)\left[\frac{\pi^2}{4k^3(\kappa)}\frac{E(\kappa)}{1-\kappa^2} - 1\right] \approx 0{,}86.$$

Среднее значение этого декремента затухания согласуется с формулой (1). При получении формулы (10) мы учли, что вклад в γ^{UTR} дают только частицы с $|v_{x0}| > (\omega/k)\,\mathrm{tg}\,(\omega_H t/2)$, для которых $f_I \neq f_{II}$. Время затухания на пролетных частицах $\tau^{UTR} \sim (1/\omega_H)(kv_T/\omega) \approx (\tau_0/\epsilon\mu)$. Вращение этих частиц в магнитном поле приводит к тому, что при $t > \pi/\omega_H$ декремент меняет знак и определяется формулой :

$$\gamma^{UTR}(t) = -\gamma^{UTR}\left(\frac{2\pi}{\omega_H} - t\right), \quad \frac{\pi}{\omega_H} < t < \frac{2\pi}{\omega_H}.$$

При больших t декремент на пролетных частицах осциллирует со временем с периодом $2\pi/\omega_H$. Однако, за очень большие времена $t \gtrsim (1/\omega_H)(\omega/\sqrt{eEk/m}) >> 1/\omega_H$ фазы ларморовского вращения пролетных частиц разойдутся за счет несинхронности движения через резонансную область, и указанные осцилляции исчезают.

Сравнивая (7) и (10) имеем, что при $t > \tau_0/\epsilon$ основным является затухание на захваченных частицах. Изменение амплитуды поля со временем определяется тогда из соотношения

$$E^2(t) \approx E^2(0)\left[1 - \frac{16}{\pi^2}\gamma_L \epsilon^2(0)\frac{t^2}{\tau_0(0)} + \ldots\right],$$

справедливого вплоть до $t \lesssim \tau^{TR}$.

Поступила в редакцию
13 февраля 1973 г.

Литература

[1] I. Bernstein. Phys. Rev., 118, 10, 1958.

[2] Р.К.Мазитов. ПМТФ, вып 1, 27, 1965.

[3] Th. O'Neil. Phys. Fl., 8, 2255, 1965.

[4] Б.Б.Кадомцев. УФН, 95, 111, 1968.

[5] А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез, 1, 81, 1961.

[6] Р.З.Сагдеев. Сб. Вопросы теории плазмы, М., Госатомиздат, вып.4, стр. 20, 1964.