Письма в ЖЭТФ, том 17, вып. 8, стр. 442 – 445 20 апреля 1973 г.

ПРАВИЛА СУММ В РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОНОВ НА ЯДРАХ

В.Д.Эфрос

Формулируются новые правила сумм (п.с.) для рассеяния электронов на ядрах. В одночастичном приближении для ядерного тока некоторые из этих п.с. имеют модельно – независимый характер. Последние п.с. привлекательны для экспериментального выяснения вопроса о вкладе неодночастичных токов.

1. Пусть $q_\mu = (q, i\omega)$ – 4-импульс, переданный электроном ядру, θ и $\epsilon_{i(f)}$ – угол рассеяния электрона и его начальная (конечная) энергия. Пусть далее $A(q, \omega)$ – и $B(q, \omega)$ – формфакторы (ф.ф.), определяющие дифференциальное сечение рассеяния неполяризованного электрона на неполяризованном покоящемся ядре в приближении однофотонного обмена и пренебрежения массой электрона

$$\sigma^{-1}_{\text{Мотт}}(\theta)\, d^2\sigma/d\Omega\, d\epsilon_f = A(q, \omega) + B(q, \omega)\,\mathrm{tg}^2\theta/2 . \tag{1}$$

Рассмотрим величины[1)]

$$\sigma_{\ell}(q^2) = \int [A(q, \omega) - {}^1\!/_2 (1 - \omega^2/q^2) B(q, \omega)] \times \\ \times (1 - \omega^2/q^2)^{-2} (G_{Ep}(q^2)/G_{Ep}(q^2 - \omega^2))^2 d\omega , \tag{2}$$

$$\sigma_{\ell_1}(q^2) = \int \omega [A(q, \omega) - {}^1\!/_2 (1 - \omega^2/q^2) B(q, \omega)] \times \\ \times (1 - \omega^2/q^2)^{-2} (G_{Ep}(q^2)/G_{Ep}(q^2 - \omega^2))^2 d\omega , \tag{3}$$

$$\sigma_{\ell_2}(q^2) = \int \omega^2 [A(q, \omega) - {}^1\!/_2 (1 - \omega^2/q^2) B(q, \omega)] \times \\ \times (1 - \omega^2/q^2)^{-2} (G_{Ep}(q^2)/G_{Ep}(q^2 - \omega^2))^2 d\omega , \tag{4}$$

$$\sigma_t(q^2) = \int B(q, \omega) (G_{Ep}(q^2)/G_{Ep}(q^2 - \omega^2))^2 d\omega . \tag{5}$$

Величины (2) – (5) приспособлены для формулирования п.с. благодаря тому, что они могут быть вычислены как по экспериментальным данным, так и теоретически. Экспериментальная процедура должна состоять в получении сечения (1) при фиксированных q и θ как функции ω (см. [1 – 4]) и последующем разделении ф.ф. $A(q, \omega)$ и $B(q, \omega)$

---

1) В (2) – (5) $\int ... d\omega$ включает сумму по дискретным уровням. Для переходов на дискретные уровни в (1) отсутствует $d\epsilon_f$, а $\sigma_{\text{Мотт}}$ содержит фактор отдачи. В (2) – (5) и ниже используются нуклонные ф.ф. G_{Ep}, G_{En}, G_{Mp}, G_{Mn}.

при каждом значении ω. Теоретическое же суммирование в (2) – (5) дает

$$\sigma_\ell(q^2) = (2J_i + 1)^{-1} \sum_{M_i} < \Psi_i^{J_i M_i} | Q^+ Q | \Psi_i^{J_i M_i} > \Big|_{\omega = 0}, \quad (6)$$

$$\sigma_{\ell 1}(q^2) = (2J_i + 1)^{-1} \sum_{M_i} < \Psi_i^{J_i M_i} | \frac{q}{2} (Q^+ J_\ell + J_\ell^+ Q) | \Psi_i^{J_i M_i} > \Big|_{\omega = 0}, \quad (7)$$

$$\sigma_{\ell 2}(q^2) = (2J_i + 1)^{-1} \sum_{M_i} < \Psi_i^{J_i M_i} | q^2 J_\ell^+ J_\ell | \Psi_i^{J_i M_i} > \Big|_{\omega = 0}, \quad (8)$$

$$\sigma_t(q^2) = (2J_i + 1)^{-1} \sum_{M_i} < \Psi_i^{J_i M_i} | \mathbf{J}_t^+ \mathbf{J}_t | \Psi_i^{J_i M_i} > \Big|_{\omega = 0} \quad (9)$$

$$J_\ell = q^{-1}(\mathbf{q}\mathbf{J}), \quad \mathbf{J}_t = \mathbf{J} - J_\ell q^{-1} \mathbf{q}.$$

В (6) – (9) $\Psi_i^{J_i M_i}$ – Ψ – функция начального состояния ядра в его с.ц.и., Q и $\mathbf{J}$ – операторы взаимодействия поля, создаваемого электроном, с зарядом и током ядра, соответствующие гамильтониану электрон-ядерного взаимодействия (ср. с обозначениями [2])

$$H' = q_\mu^{-2}\, 4\pi \ell^2 < u(\epsilon_f) | Q(q, \omega) - \vec{a}\, \mathbf{J}(q, \omega) | u(\epsilon_i) > .$$

П.с. (6) – (9) обладают определенными преимуществами перед известными п.с. [1, 2] – они позволяют отдельно изучать вклады ядерного заряда, продольного тока и поперечного тока; не содержат средних по спектру значений $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega^2}$, аккуратное вычисление которых затруднительно[1)]; не используют приближения для нуклонных ф.ф.

$$F_{1p}(q_\mu^2) = F_{2p}(q_\mu^2) = F_{2n}(q_\mu^2) = f(q_\mu^2); \quad F_{1n}(q_\mu^2) = 0, \quad (10)$$

которое, как сейчас известно, содержит ошибки $\sim (q/M)^2$ (M – масса нуклона). Разделение ф.ф. [5, 4] в п.с. [1, 2] превращает его в два п.с., более простое из которых [5] аналогично п.с. (9), но использует, однако, приближение (10). Мы предлагаем, как описано выше, поменять местами операции суммирования по $d\omega$ и разделения ф.ф. что и даст возможность найти суммы (2) – (4).

2. Пусть для ядерного тока, как обычно принято одночастичное приближение

$$Q = \sum_{i=1}^{A} \hat{\rho}_i, \quad \mathbf{J} = \sum_{i=1}^{A} \hat{\mathbf{j}}_i. \quad (11)$$

---

1) Оценка $\overline{\omega}$, данная в [2], справедлива только при достаточно больших q, оценка $\overline{\omega^2}$ неправильна.

Как известно, с точностью до M^{-2} включительно,

$$\hat{\rho}_i = \left[\left(1 - \frac{q^2}{8M^2}\right)\hat{a}_i^E - i\frac{2\hat{a}_i^M - \hat{a}_i^E}{4M^2}\vec{\sigma}_i[\,q\ p_i]\right]\exp(iqr_j), \qquad (12)$$

$$\hat{j}_i = (2M)^{-1}[\,\hat{a}_i^E(p_i e^{iqr_i} + e^{iqr_i}p_i) + \hat{a}_i^M[\vec{\sigma}_i\ q]e^{iqr_i}\,], \qquad (13)$$

где $$\hat{a}_i^{E(M)}(q_\mu^2) = G_{\substack{Ep\\(Mp)}}(q_\mu^2)\frac{1+\tau_z(i)}{2} + G_{\substack{En\\(Mn)}}(q_\mu^2)\frac{1-\tau_z(i)}{2}. \qquad (14)$$

Рассмотрим п.с. для $\sigma_{\ell 1}$ (7). Можно показать, что в приближении (11) справедливо следующее соотношение

$$\sigma_{\ell 1} = (2J_i+1)^{-1}\sum_{M_i} \langle \Psi_i^{J_i M_i} | \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{A}[\,\hat{\rho}_i^{+}(q\,\hat{j}_i) + (q\,\hat{j}_j^{+})\hat{\rho}_i]| \Psi_i^{J_i M_i}\rangle\Big|_{\omega=0} \qquad (15)$$

Вклад же в $\sigma_{\ell 1}$ членов, отвечающих произведениям зарядов и токов различных частиц, оказывается равным нулю благодаря требованиям, связанным с операцией обращения времени. Подставляя в (15) выражения (12), (13), получаем следующий простой результат

$$\sigma_{\ell 1}(q^2) = (q^2/2M)\,Z(G_{Ep}(q^2))^2. \qquad (16)$$

Итак, в одночастичном приближении сумма (3) выражается только через ф.ф. свободных нуклонов. Неодночастичные токи вносят дополнительный вклад в $\sigma_{\ell 1}$, являющийся модельно-зависимым. Вопрос о характере этого вклада будет изучен в отдельной работе[1], здесь отметим лишь, что этот вклад может достигать величин, заметных по сравнению с вкладом (16). Формула (16) аналогична формуле для дифференциальной тормозной способности в теории ионизационных потерь электронов на атомах.

3. Для сумм (2), (4), (5) исключить зависимость ответов (6), (8), (9) от вида $\Psi_i^{J_i M_i}$ удается, предполагая (11) – (14), в случае легчайших ядер. Так, просто убедиться, что, с большой степенью точности,

$$\sigma_\ell^{^2H}(q^2) = \left(1 - \frac{q^2}{4M^2}\right)(G_{Ep}(q^2))^2 + \left(1 + \frac{q^2}{4M^2}\right)\frac{2G_{En}(q^2)G_{Ep}(q^2)G_0^{^2H}(4q^2)}{G_{Ep}(4q^2) + G_{En}(4q^2)} \qquad (17)$$

где $G_0^{^2H}$ – монопольный зарядовой ф.ф. упругого e-d-рассеяния. Величина $G_0^{^2H}$ непосредственно определяется в экспериментах по измерению поляризации упруго рассеянных дейтронов [6]. Безмодельное соотношение (17) может быть полезно в вопросе об электрическом ф.ф. нейтрона G_{En}.

---

[1] Этот вопрос автору предложил рассмотреть И.С.Шапиро.

Безмодельные соотношения типа (17) удается получить и для $A = 3,4$. Для этой цели применяется преобразование Фабра де ля Рипель [7]. Получаем, например

$$\sigma_{\ell}^{^4He}(q^2) \approx 2\left(1-\frac{q^2}{4M^2}\right)\left(G_{Ep}(q^2)\right)^2 + \left(1+\frac{q^2}{8M^2}\right)F^{^4He}\left(\frac{8}{3}q^2\right)\times$$

$$\times\frac{(G_{Ep}(q^2))^2+4G_{En}(q^2)G_{Ep}(q^2)}{G_{Ep}\left(\frac{8}{3}q^2\right)+G_{En}\left(\frac{8}{3}q^2\right)}. \qquad (18)$$

Здесь $F^{^4He}$ – упругий ф.ф. $e-\alpha$-рассеяния.

4. Кулоновская энергия ядра с учетом конечных размеров нуклонов равна

$$E_{\text{кул}} = \frac{A(A-1)}{2}\,\frac{e^2}{2\pi} < \Psi_i \mid \int d^3\mathbf{q}\, q^{-2}\hat{a}_1^E\,\hat{a}_2^E \exp i\,\mathbf{q}\,\mathbf{r}_{12} \mid \Psi_i > . \qquad (19)$$

С другой стороны, подставим в (6) выражения (11), (12) и выполним суммирование по M_i. Пренебрегая вкладом спин-орбитального взаимодействия и величиной G_{En}^2, получаем

$$\sigma_{\ell}(q^2) = \left(1-\frac{q^2}{4M^2}\right)\left[Z(G_{Ep}(q^2))^2 + A(A-1) < \Psi_i \mid \hat{a}_1^E\,\hat{a}_2^E\, j_0(qr_{12})\Psi_i >_{|\omega=0}\right]. \qquad (20)$$

Сравнивая (19) и (20), получаем

$$E_{\text{кул}} = (e^2/\pi)\int_0^\infty dq[\sigma_{\ell}(q^2)(1+q^2/4M^2) - Z(G_{Ep}(q^2))^2]. \qquad (21)$$

С помощью формулы (21) кулоновские энергии ядер можно, в принципе, определить из экспериментов по неупругому рассеянию электронов.

Автор искренне благодарен А.М.Бадалян, Я.А.Смородинскому, И.С.Шапиро за ценные предложения и советы, высказанные при обсуждении работы.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
14 марта 1973 г.

Литература

[1] S.D.Drell, C.L.Schwartz. Phys. Rev., 112, 568, 1958.

[2] K.W.McVoy, L.Van Hovl. Phys. Rev., 125, 1034, 1962.

[3] G.R.Bishop, D.B.Isabelle, C.Betourne. Nucl. Phys., 54, 97, 1964.

[4] J.W.Lightbody. J. Phys. Lett., 33B, 129, 1970.

[5] W.Czyż. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys., 12, 649, 1964; W. Czyż, L.Leśniak, A.Małecki. Ann. Phys., 42, 119, 1967.

[6] M.Gourdin, C.A.Piketty. Nuovo Cim., 32, 1137, 1964.

[7] M.Fabre de la Ripelle. Progr. Th. Phys., 40, 1454, 1968; Fizika, 4, 1, 1972.