

## КРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕПЛАНАРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА ПРИ СИЛЬНОМ АНТИФЕРРОМАГНИТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПО ДИАГОНАЛЯМ

Е. А. Шаповал

Показано, что при малых  $\lambda = J_1 / |J_2|$ , где  $J_1$  и  $J_2$  – константы взаимодействия по сторонам и диагоналям, сдвиг температуры перехода и изменение критических индексов пропорциональны  $\lambda^2$ . При этом индексы удовлетворяют гипотезе подобия.

В настоящее время найдено точное решение лишь небольшого числа моделей, испытывающих фазовый переход. Это, прежде всего, различные варианты плоской модели Изинга с взаимодействием ближайших соседей [1], модель Слейтера и ее обобщение, так называемая шести-вершинная, или *F*-модель [2], и наконец, восьмивершинная модель без внешнего поля, или модель Бакстера [3]; первые две модели являются ее частным случаем. Следующей по сложности является, по-видимому, непланарная модель Изинга, т. е. модель Изинга с пересечением взаимодействий. Она эквивалентна восьмивершинной модели во внешнем поле, ее решение до сих пор не получено, однако оказывается возможным определить критические индексы непланарной модели в одном частном случае.

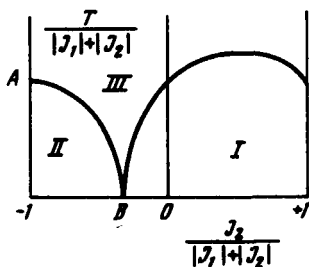


Рис. 1

Если взаимодействия по диагоналям элементарной ячейки одинаковы и равны  $J_2$ , а взаимодействия по сторонам различны и равны  $J_1$  и  $J_1'$ , то статсумма непланарной модели в отсутствии внешнего поля зависит лишь от модулей  $|J_1 + J_1'|$  и  $|J_1 - J_1'|$  и удовлетворяет соотношению

$$Z(|J_1 + J_1'|, |J_1 - J_1'|, J_2) = Z(|J_1 - J_1'|, |J_1 + J_1'|, -J_2). \quad (1)$$

Эти свойства симметрии можно проверить, заменяя строки столбцами и меняя направления спинов в шахматном порядке и в каждой второй строке или столбце.

Фазовая диаграмма изотропной непланарной модели ( $J_1 = J_1'$ ) в зависимости от температуры и соотношения между константами взаимодействия схематически показана на рис. 1. В области I имеет место ферромагнитное (по диагоналям) упорядочение, в области II – антиферромагнитное, область III соответствует парамагнитной фазе. Точка B

определяется условием равенства энергий ферромагнитной и антиферромагнитной фазы при нулевой температуре ( $J_2 = -|J_1|/2$ ), в точках **A** и **C**, т. е. при  $|J_1| = 0$ , модель распадается на две одинаковые невзаимодействующие планарные подрешетки Изинга. Нас будет интересовать критическое поведение вблизи точки **A**, когда  $|J_1| \ll -J_2$ , так что взаимодействие  $J_1$  между подрешетками можно рассматривать как малый параметр.

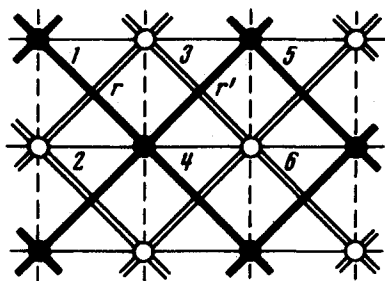


Рис. 2

Нам будет удобнее, однако, используя соотношение симметрии (1), рассмотреть эквивалентную модель с ферромагнитным взаимодействием по диагоналям и равным по величине, но противоположным по знаку взаимодействием по сторонам. Эта модель показана на рис. 2: темные и светлые узлы принадлежат первой и второй подрешеткам соответственно, толстые линии – сильное ферромагнитное взаимодействие  $|J_2|$ , тонкие линии, сплошные и пунктирные – равные по величине, но противоположные по знаку слабые взаимодействия  $\pm J_1$  между подрешетками. Ее гамильтониан имеет вид:

$$\begin{aligned}
 -H/T = & K \sum_{(ij)}^{(1)} \sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(1)} + K \sum_{(ij)}^{(2)} \sigma_i^{(2)} \sigma_j^{(2)} + \\
 & + \lambda \sum_{\mathbf{r}} \Delta_1^{(1)}(\mathbf{r}) \Delta_2^{(2)}(\mathbf{r}) + \lambda \sum_{\mathbf{r}'} \Delta_2^{(1)}(\mathbf{r}') \Delta_1^{(2)}(\mathbf{r}') .
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Здесь  $K = |J_2|/T$ ,  $\lambda = |J_1|/T$ , верхние индексы указывают на номер подрешетки, в первых двух членах суммирование производится по парам ближайших соседей каждой из подрешеток, а в последних двух членах – по пересечениям диагоналей  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  (см. рис. 1), отличающимся направлениями сторон подрешеток. Операторы  $\Delta_{1,2}$ , отнесенные к этим точкам пересечения, равны разностям соседних по подрешетке спинов (см. рис. 1):

$$\Delta_1^{(1)}(\mathbf{r}) = \sigma_1^{(1)} - \sigma_4^{(1)}; \quad \Delta_2^{(2)}(\mathbf{r}) = \sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)}; \quad \Delta_2^{(1)}(\mathbf{r}') = \sigma_4^{(1)} - \sigma_5^{(1)}, \dots
 \tag{3}$$

Гамильтониан (2) инвариантен относительно изменения направления всех спинов в одной из подрешеток, т. е. обладает той же симметрией, что и модель Бакстера, рассматриваемая как две изинговые подрешетки с четырехспиновым взаимодействием между ними [4]. Вместе с тем наша модель не имеет симметрии относительно точки перехода, аналогичной симметрии Крамерса – Ванье обычной модели Изинга или симметрии Сатерленда [5] модели Бакстера, которая позволила бы найти кривую перехода без вычисления статсуммы.

Разложим теперь статсумму модели с гамильтонианом (2) в ряд по  $\lambda$ ; в разложение войдут лишь члены с четными степенями. Общий член этого ряда равен

$$\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} \sum_{r_1} \dots \sum_{r_{2n}} \langle \Delta_1(r_1) \dots \Delta_1(r_{2n}) \rangle \langle \Delta_2(r_1) \dots \Delta_2(r_{2n}) \rangle + \dots \quad (4)$$

Угловыми скобками мы обозначили усреднение по невзаимодействующим подрешеткам. Многоточием обозначены члены, которые получаются из написанного явно члена заменой  $r \rightarrow r'$  и соответствующих  $\Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ , так что общее число членов в фигурных скобках равно  $2^{2n}$ .

Для оценки полученных таким образом корреляторов по невзаимодействующим подрешеткам вблизи  $T_c$ , когда радиус корреляции  $R_c \sim 1/|r| \gg 1$ , используем теорию подобия [6, 7], применимость которой в рассматриваемом случае вне сомнений. Операторы  $\Delta_1 = \partial\sigma/\partial x$  и  $\Delta_2 = \partial\sigma/\partial y$  имеют большой критический индекс, равный  $9/8$ , т. е. ведут себя при масштабных преобразованиях как  $R^{-9/8}$ , в частности, их парный коррелятор  $\langle \Delta(r_1)\Delta(r_2) \rangle \sim |r_1 - r_2|^{-9/4}$ , поэтому вклад от суммирования по большим расстояниям ( $\sim R_c$ ) между операторами оказывается порядка  $R_c^{-2-n/2} \sim |r|^{2+n/2}$ , т. е. несущественен. Напротив, главный вклад, существенный для сингулярной части термодинамических величин, появляется тогда, когда операторы попарно сближаются, так как соответствующие интегралы из-за большого критического индекса расходятся на малых расстояниях<sup>1)</sup>.

Согласно операторной алгебре [9, 10], при сближении двух входящих в коррелятор операторов происходит редукция. В нашем случае, если два оператора  $\Delta$  (соответствующие операторам  $D_{-3/2}$  работы [10]) находятся на расстоянии, малом по сравнению с другими расстояниями, то можно произвести замену:

$$\Delta_\alpha(r_1)\Delta_\beta(r_2) \rightarrow \langle \Delta_\alpha(r_1)\Delta_\beta(r_2) \rangle + \frac{A_{\alpha\beta}}{|r_1 - r_2|^{5/4}} \delta \mathcal{E}\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right);$$

$$\alpha, \beta = 1, 2; \quad (5)$$

где  $\delta \mathcal{E} = \mathcal{E} - \langle \mathcal{E} \rangle$ , а  $\mathcal{E} = \sigma_i \sigma_{i+1}$  — оператор плотности энергии,  $A_{\alpha\beta} \sim 1$  и зависит лишь от направления  $(r_1 - r_2) / |r_1 - r_2|$ . В результате оказывается, что существенный для термодинамической особенности вклад (3) определяется выражением:

$$\frac{\lambda^{2n}}{n!} \sum_{r_1} \dots \sum_{r_n} \langle \mathcal{E}'(r_1) \dots \mathcal{E}'(r_n) \rangle^2, \quad (6)$$

где операторы  $\mathcal{E}' \sim \sigma_i \sigma_j$ , а  $\sigma_i$  и  $\sigma_j$  находятся на некотором эффективном расстоянии между собой  $\sim 1$ .

<sup>1)</sup> Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении антиферромагнитной модели Изинга во внешнем поле [8].

Выражение (6) аналогично выражению, возникающему при разложении статсуммы модели Бакстера по параметру межрешеточного взаимодействия. Отсюда, сдвиг температуры перехода  $T_{c0} - T_c \sim \lambda^2$ , и критический индекс теплоемкости  $\alpha \sim \lambda^2$ .<sup>1</sup>

Аналогичным образом, разлагая соответствующие выражения по  $\lambda$ , а затем, с помощью операторной алгебры, сводя их к интегралам от "квазиэнергетических" корреляторов, можно определить и остальные критические индексы. Индекс радиуса корреляции оказывается равен  $\nu = 1 - \alpha/2$ , намагниченности  $-\beta = (1/8)(1 - \alpha/2)$ , восприимчивости  $-\gamma = (7/4)(1 - \alpha/2)$ . Критический индекс парной корреляционной функции спинов не меняется в первом порядке по  $\lambda^2$  ( $\eta = 1/4$ ), а парный коррелятор плотности энергии ведет себя при  $T = T_c$  как  $R^{-2(1 - \alpha/2)}$ , т. е. критический индекс оператора плотности энергии равен  $1 - \alpha/2$ .

Применение критерия изменяемости критических индексов Каданова - Вегнера [4] вместе с операторной алгеброй подтверждает эти результаты.

Подведем итоги. Критические индексы и температура перехода в окрестности точки **A** на фазовой диаграмме рис. 1 изменяются пропорционально  $\lambda^2$ . Индексы совпадают по обе стороны точки перехода и удовлетворяют гипотезе подобия. Такого поведения индексов следует ожидать и на всей кривой перехода **AB**, так как не видно причин появления на ней особой точки, где могло бы качественно измениться критическое поведение модели. Эти свойства связаны, по-видимому, с рассмотренной выше симметрией гамильтониана (2).

Автор выражает благодарность М.А.Микулинскому за полезные обсуждения и ценные замечания.

Институт физико-технических  
и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию  
23 марта 1973 г.

### Литература

- [1] L.Onsager. Phys. Rev., 65, 117, 1944.
- [2] E.H.Lieb. Phys. Rev. Lett., 18, 692, 1046; 19, 108, 1967.
- [3] F.J.Baxter. Phys. Rev. Lett., 26, 832, 1971; Ann. Phys. (New York), 193, 325, 1972.
- [4] L.P.Kadanoff, F.J.Wegner. Phys. Rev., B4, 3989, 1971.
- [5] B.Sutherland. J.Math Phys., 11, 3183, 1970.
- [6] А.З.Паташинский, В.Л.Покровский, ЖЭТФ, 46, 2093, 1964.
- [7] L.P.Kadanoff. Physica, 2, 263, 1969.
- [8] А.З.Паташинский, В.Л.Покровский, С.Б.Хохлачев. ЖЭТФ, 63, 1521, 1972.
- [9] А. М.Поляков. ЖЭТФ, 57, 271, 1969.
- [10] L.P.Kadanoff, H.Ceva. Phys. Rev., B3, 3918, 1971.