Письма в ЖЭТФ, том 17, вып. 10, стр. 566 – 570 20 мая 1973 г.

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

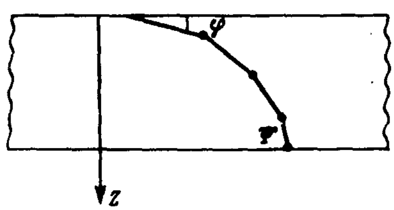
М.Я.Азбель, С.Д.Павлов, А.Н.Верещагин, И.А.Гамаля

Найдена зависимость сопротивления пластины произвольной толщины от толщины и температуры с учетом диффузии электронов (вследствие столкновений с фононами) и произвольного характера отражения их от поверхностей пластины.

Исследованию сопротивления тонких металлических образцов в зависимости от температуры и размера посвящено большое число экспериментальных работ (см. [1], а также обзор [2]). Последовательное теоретическое изучение этого вопроса сводится к рассмотрению диффузии электрона, обусловленной столкновениями с фононами между стенками образца, отражение от которых существенно зависит от угла падения на стенку. Все же имеющиеся в настоящее время теоретические работы относятся к случаям, когда образец столь тонок, что диффузия отсутствует (см. [3 – 7]).

В настоящей работе впервые изучен общий случай пластины произвольной толщины и показано, что вид зависимости сопротивления от температуры существенно меняется с толщиной образца и характером отражения от поверхности (формулы (1), (4 – 6)). Поясним полученные результаты простыми качественными соображениями.

В пространстве углов электрон совершает броуновское движение (см., например, [8, 9]). Поэтому угол, под которым движется электрон после n-го столкновения с фононом, есть $\phi_n \sim \phi + a\sqrt{n}$, где ϕ – начальный угол (см. рисунок), $a = T/\theta$ – характерный угол поворота после однократного столкновения (T – температура, θ – температура Дебая). Поскольку существенны, как видно из дальнейшего, только малые углы, достаточно учитывать только уход электрона в результате диффузии из этой области углов.



Расчет эффективной длины свободного пробега различен для электронов, имеющих на всем своем пути углы движения относительно поверхности, не превышающие угла $\chi = d/\ell_T$, и электронов, для которых $\phi > \chi$. Здесь d – толщина пластины, ℓ_T – длина "шага" электрона при диффузии, т. е. пути между двумя последовательными столкновениями электрона с фононами: $\ell_T = \ell_\theta a^{-3}$, $\ell_\theta = hv_F/\theta$, h – постоянная Планка, v_F – фермиевская скорость.

В первом случае (ϕ, $\phi_n < \chi$) в направлении оси z (см. рисунок) путь электрона между n и $n+1$ столкновениями с фононами есть $z_n \sim \ell_T\phi_n$. Число столкновений на одном "витке" (т. е. на пути электрона от одной поверхности к другой) можно найти, исходя из того, что сумма величин z_n на одном "витке" есть величина $\sim d$, а именно для $k+1$ "витка" имеем $\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}} z_n \sim \ell_T(\phi + a\sqrt{n_k})(n_{k+1} - n_k) \sim d$. Это позволяет определить функцию n_k, т. е. число "шагов" за k "витков":

$$n_k \sim \left[\frac{\phi}{\chi k} + \left(\frac{a}{\chi k}\right)^{2/3}\right]^{-1}.$$

Эффективный путь электрона, на котором он вносит вклад в плотность тока, заканчивается, когда вероятность диффузного отражения становится порядка единицы, т. е. $\sum_{k=1}^{k_{\text{полн}}} \{1 - q(\phi_{n_k})\} \sim 1$ ($q(\psi)$ – коэффициент зеркального отражения). Это позволяет определить полное число витков на этом пути, а значит и полное число "шагов" $n_{\text{полн}}$ на этом пути.

Во втором случае ($\phi > \chi$) на одном "шаге" укладывается несколько "витков". На одном "шаге" угол полета электрона не меняется и, стало быть, на "шаге" совершается $\ell_T \phi_n / d$ столкновений (n – номер "шага"). Поэтому полное число столкновений электрона с фононами на эффективной длине свободного пробега определится тогда из уравнения $\sum\limits_{n=0}^{n_{\text{полн}}} (\ell_T \phi_n / d)\,(1 - q(\phi_n)) \sim 1$.

Значение $n_{\text{полн}}$ определяет эффективную длину пути $\sim \ell_T n_{\text{полн}}(\phi)$ электрона, вылетевшего от поверхности под углом ϕ. Разумеется, в любом случае максимально возможная длина пробега не может превосходить обычной длины свободного пробега в массивном металле, обусловленной как фононами, так и примесями: $\ell^{-1}_{\text{масс}} \sim \ell^{-1}_{ep} + \ell^{-1}_i \sim (\ell_T / a^2)^{-1} + \ell^{-1}_i$ (ℓ_i – длина пробега за счет примесей). Поэтому полная эффективная длина пробега электрона равна по порядку величины $\ell^{-1}_{\text{эфф}}(\phi) \sim$ $\sim (\ell_T n_{\text{полн}}(\phi))^{-1} + \ell^{-1}_{\text{масс}}$, а удельная электропроводность имеет вид $\sigma \sim \frac{Ne^2}{p_F} \int\limits_0^{\pi/2} \ell_{\text{эфф}}(\phi)\, d\phi$, где N – плотность заряда, p_F – импульс Ферми, e – заряд электрона.

При $d < \ell_{ep}$ по порядку величины для σ находим

$$\sigma \sim \frac{Ne^2 d}{p_F} \left\{ \ln \frac{1}{\Phi + \Psi} + \frac{1}{\chi\, \Phi^{-1} [1 + (\Phi/a)^2]^{-1} + \kappa \Psi^{-1}} \right\}, \qquad (1)$$

где Φ и Ψ определяется из соотношений

$$[1 + (\Phi/a)^2]\, \Phi\, (1 - q(\Phi)) = \chi, \qquad \chi = d/\ell_T;$$
$$\Psi(1 - q(\Psi)) = \kappa, \qquad \kappa = \frac{d}{\ell_i} + \frac{d}{\ell_{ep}}, \qquad a = \frac{T}{\theta}. \qquad (2)$$

Полученная формула показывает, в частности, что температура, начиная с которой основную роль играет рассеяние на фононах, соответствует $\ell_T < \ell_i < \ell_{ep}$ и, вообще говоря, сложным образом зависит от толщины, определяясь уравнением

$$\ell_T \Phi [1 + (\Phi/a)^2] \sim \ell_i \Psi. \qquad (3)$$

В предельных случаях формула (1) легко упрощается. Так, если рассеянием на примесях можно пренебречь, то имеем при $\ell_{ep} > d > \ell_T \frac{T}{\theta}$

$$\sigma \sim \frac{Ne^2 d}{p_F} \left\{ \ln \frac{1}{\tilde{\Phi}} + \frac{\tilde{\Phi}^3}{\eta} \right\},$$
$$\tilde{\Phi}^3 (1 - q(\tilde{\Phi})) = \eta, \qquad \eta = \frac{d}{\ell_{ep}}. \qquad (4)$$

При $d < \ell_T \frac{T}{\theta}$ в отсутствии рассеяния на примесях может иметь место как формула (4) (при $\Phi > a$), так и формула

$$\sigma \sim \frac{Ne^2 d}{p_F} \left\{ \ln \frac{1}{\Phi^*} + \frac{\Phi^*}{X} \right\}, \tag{5}$$

$$\Phi^* \left(1 - q(\Phi^*)\right) = X$$

при $\Phi < a$.

Отсюда видно, что зависимость сопротивления от температуры и толщины существенным образом связана с характером отражения электронов от поверхности и позволяет по экспериментальным данным найти функцию $q(\Psi)$. При этом описание отражения от поверхности такой функцией заведомо оправдано в случае предельно тонких образцов, когда интегральным членом в общем линейном граничном условии можно пренебречь. В общем случае введение $q(\psi)$ носит качественный характер.

При температурах, когда роль электронов, отражающихся диффузно, несущественна, формулы (4) – (5) в простейших случаях дают:

1) если $q(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi < \phi_0 \\ 0, & \psi > \phi_0 \end{cases}$, то

$$\sigma \sim T^{-3} \quad \text{при} \quad \phi_0 < \frac{T}{\theta} < \left(\frac{\ell_\theta}{d}\phi_0\right)^{1/3}, \tag{6а}$$

$$\sigma \sim T^{-5} \quad \text{при} \quad \frac{T}{\theta} < \min\left\{\phi_0,\ \left(\phi_0^3 \frac{\ell_\theta}{e}\right)^{1/5}\right\}.$$

2) если $1 - q(\psi) \sim \frac{\psi}{\phi_0}$ ($\psi < \phi_0$; ϕ_0 – характерный угол, разделяющий области существенно зеркального и существенно диффузного рассеяния), то

$$\sigma \sim T^{-3/2} \quad \text{при} \quad \frac{T}{\theta} < \min\left\{\left(\phi_0 \frac{d}{\ell_\theta}\right)^{-1},\ \left(\phi_0 \frac{\ell_\theta}{d}\right)^{1/3}\right\},$$

$$\sigma \sim T^{-5/4} \quad \text{при} \quad \left(\phi_0 \frac{d}{\ell_\theta}\right)^{-1} < \frac{T}{\theta} < \left(\phi_0^3 \frac{\ell_\theta}{d}\right)^{1/5}. \tag{6б}$$

Сравнение с экспериментом [1] говорит, по-видимому, в пользу зависимости $q(\psi)$ типа "ступеньки" (формула (6а)).

Калмыцкий
государственный университет

Поступила в редакцию
13 апреля 1973 г.

Литература

[1] Ю.П.Гайдуков, Я.Кадлецова. ЖЭТФ, 57, 1167, 1969; 59, 701, 1970; Phys. Stat. Sol., 2, 407, 1970.

[2] D.C.Larson.Сб."Physics of thin films". New-York – London, 6, 81, 1971.

[3] J.L.Olsen. Helv. Phys. Acta, 31, 713, 1958.

[4] М.Я.Азбель, Р.Н.Гуржи. ЖЭТФ, 42, 1632, 1962.

[5] J.E.Parrott. Proc. Phys. Soc., 85, 1143, 1965.

[6] Л.А.Фальковский. ЖЭТФ, 58, 1830, 1970.

[7] М.Я.Азбель, С.Д.Павлов, И.А.Гамаля, А.Н.Верещагин. Письма в ЖЭТФ, 16, 295, 1972.

[8] И.М.Лифшиц, М.Я.Азбель, М.И.Каганов. "Электронная теория металлов", М., 1971, ч.III.

[9] Р.Н.Гуржи, А.И.Копелиович. ЖЭТФ, 61, 2514, 1971.