Письма в ЖЭТФ, том 17, вып. 10, стр. 590 – 593　　　　*20 мая 1973 г.*

МЕТОД САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ В ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ МАГНОНОВ

В. М. Цукерник, Р. П. Янкелевич

Гамильтониан спиновой системы ферромагнетика, помещенного в высокочастотное магнитное поле, параллельное избранной оси, в спин-волновом приближении имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_k \epsilon_k a_k^+ a_k + \frac{1}{2} \sum_k (V_k a_k a_{-k} e^{i\omega t} + V_k^* a_k^+ a_{-k}^+ e^{-i\omega t}) + \mathcal{H}_{int} \qquad (1)$$

$$\epsilon_k = \sqrt{A_k^2 - |B_k|^2}, \qquad V_k = \frac{\mu h_o}{2\epsilon_k} B_k ,$$

где h_o – амплитуда высокочастотного поля, a_k и a_k^+ – магнонные бозе-операторы, μ – магнетон Бора. Явные выражения для A_k и B_k приведены, например, в [1]. В (1) оставлены только "резонансные" слагаемые, описывающие распад фотона на два магнона и обратный процесс, поскольку предполагается, что $\mu h_o << \epsilon_k$. Исключая явную зависимость от времени с помошью унитарного оператора $U = \exp\left[-\frac{i\omega t}{2}\sum_k a_k^+ a_k\right]$, перейдем к эквивалентному гамильтониану:

$$\tilde{\mathcal{H}} = U^{-1}\mathcal{H}U - i\hbar U^{-1}\frac{\partial U}{\partial t} = \tilde{\mathcal{H}}_0 + \mathcal{H}_{int} \quad , \tag{2}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \sum_k\left(\epsilon_k - \frac{\hbar\omega}{2}\right) a_k^+ a_k + \frac{1}{2}\sum_k (V_k a_k a_{-k} + V_k^* a_k^+ a_{-k}^+).$$

В гамильтониане взаимодействия $\mathcal{H}_{int}$ мы оставляем только слагаемые четвертого порядка по бозе-операторам, имеющие обменное происхождение и содержащие поэтому равное число операторов рождения и уничтожения. Спектр "осциллятора" с фиксированным значением k в гамильтониане $\tilde{\mathcal{H}}_0$ дискретен, если $|\epsilon_k - \frac{\hbar\omega}{2}| > |V_k|$, и непрерывен, если $|\epsilon_k - \frac{\hbar\omega}{2}| \leqslant |V_k|$. Область $\mathbf{k}$-пространства, выделяемая вторым неравенством является областью параметрического возбуждения, в которой гейзенберговские операторы $a_k(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\mathcal{H}}_0 t\right) a_k \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\tilde{\mathcal{H}}_0 t\right)$ и $a_k^+(t)$ экспоненциально возрастают со временем.

Взаимодействие магнонов должно приводить к ограничению роста в области параметрического возбуждения. Поскольку при этом возбуждаются пары магнонов с противоположными импульсами, следует думать, что основную роль в ограничении должны играть взаимодействия между парами типа БКШ и фермижидкостного типа

$$\mathcal{H}'_{int} = \frac{1}{2N}\sum_{kk'}(\Phi_{kk'} a_k^+ a_{-k}^+ a_{k'} a_{-k'} + \Psi_{kk'} a_k^+ a_k a_{k'}^+ a_{k'}). \tag{3}$$

(Явные выражения для амплитуд Φ и Ψ см в [1]). Такое рассмотрение было проведено в работах Захарова, Львова и Старобинца [2, 3]. Остальные взаимодействия приводят, как обычно, к интегралам столкновений в кинетическом уравнении.

Если, благодаря столкновениям, система приходит в состояние термодинамического равновесия, то в этом состоянии можно ввести самосогласованное поле, в результате чего гамильтониан (2) эквивалентен следующему:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \sum_k\left(\epsilon_k - \frac{\hbar\omega}{2} + \Lambda_k\right)a_k^+ a_k + \frac{1}{2}\sum_k (\Delta_k a_k a_{-k} + \Delta_k^* a_k^+ a_{-k}^+) + \mathcal{H}''_{int} \tag{4}$$

где

$$\Lambda_k = \frac{1}{N}\sum_{k'}\Psi_{kk'}\langle a_{k'}^+ a_{k'}\rangle , \qquad \Delta_k = V_k + \frac{1}{N}\sum_{k'}\Phi_{kk'}\langle a_{k'}^+ a_{-k'}^+\rangle, \tag{5}$$

а усреднение производится с равновесной матрицей плотности системы с гамильтонианом (4). Существование равновесного распределения , прежде всего, предполагает возможность диагонализации гамильтониана (4). Это означает, что с помощью u-v-преобразования можно ввести новые квазичастицы, закон дисперсии которых имеет следующий вид:

$$\tilde{\epsilon}_k = \sqrt{(\epsilon_k - \frac{\hbar\omega}{2} + \Lambda_k)^2 - |\Delta_k|^2}\,, \qquad (6)$$

причем функции Λ_k и Δ_k, как и в случае модели БКШ для сверхпроводника [4] определяются из условий самосогласования:

$$\Lambda_k = \frac{1}{N}\sum_{k'}\Psi_{kk'}\left[\frac{\epsilon_{k'} - \frac{\hbar\omega}{2} + \Lambda_{k'}}{\sqrt{(\epsilon_{k'} - \frac{\hbar\omega}{2} + \Lambda_{k'})^2 - |\Delta_{k'}|^2}}\left(\tilde{n}_{k'} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right], \qquad (7)$$

$$\Delta_k = V_k - \frac{1}{N}\sum_{k'}\Phi_{kk'}\frac{\Delta_{k'}}{\sqrt{(\epsilon_{k'} - \frac{\hbar\omega}{2} + \Lambda_{k'})^2 - |\Delta_{k'}|^2}}\left(\tilde{n}_{k'} + \frac{1}{2}\right), \qquad (8)$$

где $\tilde{n}_k$ – равновесная бозевская функция для квазичастиц:

$$\tilde{n}_k = [\exp(\beta\tilde{\epsilon}_k) - 1]^{-1}$$

Как видно из выражения (6), необходимым условием для установления равновесного состояния является выполнение неравенства

$$|\epsilon_k - \frac{\hbar\omega}{2} + \Lambda_k| > |\Delta_k| \qquad (9)$$

для всех k. В случае сверхпроводимости условие (9), естественно, отсутствует. Релаксация системы к равновесному распределению $\tilde{n}_k$ обусловлена взаимодействием $\mathcal{H}''_{int}$, приводящим к интегралу столкновений в системе новых квазичастиц с законом дисперсии (6)[1].

Таким образом, равновесное стационарное распределение может установиться, если Λ_k и Δ_k являются решениями системы уравнений (7) и (8), удовлетворяющими условию (9).

Будем считать, что амплитуды $\Phi_{kk'}$ и $\Psi_{kk'}$ являются постоянными в области $|\epsilon_k - \frac{\hbar\omega}{2}| \leqslant |V_k|$ и равными нулю вне этой области[2]. Кроме того, для простоты заменим функцию V_k константой V. При этом, как видно из (7) и (8) величины Λ_k и Δ_k, также постоянны. Поскольку $|V_k| \ll \hbar\omega$, разность $\epsilon_k - \hbar\omega/2$ в области параметрического возбуждения можно разложить и ограничиться линейным по k слагаемым.

---

[1] В работе [3] в уравнениях для корреляторов $\langle a_k^+ a_k \rangle$ и $\langle a_k a_{-k} \rangle$ релаксационные слагаемые введены без учета перестройки спектра, обусловленной самосогласованным полем, что дает существенно иные, по сравнению с (7), (8), условия самосогласования.

[2] Это означает, что мы ограничиваемся взаимодействием пар магнонов только в области параметрического возбуждения. Вне этой области вклад взаимодействия пар мал в меру малости амплитуды поля.

Тогда в случае температуры, равной нулю, получаем систему уравнений:

$$\Lambda = \frac{\Psi\left(\frac{\hbar\omega}{2} - \epsilon_o\right)^{1/2}}{8\pi^2 \theta_c^{3/2}} \left[\sqrt{(\Lambda + |V|)^2 - |\Delta|^2} - \sqrt{(\Lambda - |V|^2 - |\Delta|^2} - 2|V|\right], \tag{7'}$$

$$|\Delta| = |V| - |\Delta| \frac{\Phi\left(\frac{\hbar\omega}{2} - \epsilon_o\right)^{1/2}}{8\pi^2 \theta_c^{3/2}} \ln \frac{\Lambda + |V| + \sqrt{(\Lambda + |V|)^2 - |\Delta|^2}}{\Lambda - |V| + \sqrt{(\Lambda - |V|)^2 - |\Delta|^2}}, \tag{8'}$$

ϵ_o – щель в спектре спиновых волн.

Из системы уравнений (7′) и (8′) прежде всего видно, что она не имеет решения при $\Psi \leqslant 0$. Действительно, в случае $\Psi < 0$ из определения (5) для Λ следует, что $\Lambda < 0$. С другой стороны, при этом правая часть (7′) положительна. При $\Psi = 0$ ($\Lambda = 0$) аргумент логарифма в (8′) отрицателен. В общем случае, когда $\Psi = 0$, $\Phi_{kk'} = \Phi$, а V_k определяется из (1), уравнение (8′) также не имеет решения. В другом предельном случае, когда $\Phi = 0$, а $\Psi > 0$ уравнение (7), как легко убедиться имеет решение только при выполнении условия

$$\Psi > 8\pi^2 (\sqrt{2} + 1) \frac{\theta_c^{3/2}}{\left(\frac{\hbar\omega}{2} - \epsilon_o\right)^{1/2}},$$

которое не может быть удовлетворено ни при каких разумных частотах. Хотя при произвольных значениях Φ и Ψ не удается получить аналогичные условия в явном виде, наличие условий на амплитуды взаимодействия означает, что существуют области значений Φ и Ψ, где невозможны стационарные состояния.

В таких случаях поведение системы со временем описывается уравнениями для корреляторов $< a_k^+ a_k >$ и $< a_k a_{-k} >$. В простом случае, когда амплитуды $\Phi_{kk'}$, $\Psi_{kk'}$ и V_k постоянны, можно показать, что в системе устанавливается периодический режим, период и амплитуда которого зависят от соотношения между V и константами взаимодействия магнонов Ψ и Φ.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
2 апреля 1973 г.

Литература

[1] А.И.Ахиезер, В.Г.Барьяхтар, С.В.Пелетминский. Спиновые волны, М., изд. Наука, 1967 г.

[2] В.Е.Захаров, В.С.Львов, С.С.Старобинец. ЖЭТФ, 59, 1209, 1970.

[3] В.Е.Захаров. В.С.Львов. ЖЭТФ, 60, 2066, 1971.

[4] Дж.Шрифер. Теория сверхпроводимости, М., изд. Мир, 1970.