Письма в ЖЭТФ, том 17, вып. 11, стр. 633 – 636 *5 июня 1973 г.*

УСЛОВИЯ САМОСОГЛАСОВАНИЯ В СИСТЕМАХ С НАРУШЕННОЙ СИММЕТРИЕЙ

С. А. Фаянс, В. А. Ходель

Выведены условия самосогласования, которым должны удовлетворять массовый оператор, матрица плотности и двухчастичное взаимодействие в системах с нарушенюй симметрией.

В этой статье мы хотим обратить внимание на то обстоятельство, что для систем с нарушенной симметрией, свойства которых интенсивно исследуются в последнее время [1], существуют условия самосогласования, связывающие между собой определенные компоненты массового оператора Σ, матрицы плотности ρ и двухчастичное взаимодействие. Они играют важную роль при нахождении критических точек и определении характеристик спектра коллективных возбуждений. Мы выведем эти условия, используя обобщенное тождество Уорда. Выполняя преобразование ψ-операторов $\psi(x) \to \exp[if(t)Q(x)]\psi(x)$, где $Q(x)$ – некоторый не зависящий от времени эрмитовский оператор, $f(t)$ – произвольная вещественная функция времени, и действуя стандартными методами (см., например, [2]), получаем[1)]

$$\omega\mathcal{T}(x, p, \epsilon, \omega; [i^{\circ}_{Q}]) + \mathcal{T}(x, p, \epsilon, \omega; [D_Q]) = G^{-1}\left(x, p, \epsilon + \frac{\omega}{2}\right)Q(x) - Q(x)G^{-1}\left(x, p, \epsilon - \frac{\omega}{2}\right). \qquad (1)$$

Здесь $G^{-1} = \epsilon - \epsilon^{\circ}_{p} - \Sigma$ – обратная гриновская функция, $\mathcal{T}[i^{\circ}_{Q}]$ и $\mathcal{T}[D_Q]$ – вершины, в которых роль внешнего поля играет 4-я компонента "Q-тока" i^{ν}_{Q} и его "дивергенция" $iD_Q = \partial_\nu i^{\nu}_{Q}$.

Нас будут интересовать те случаи, когда правая часть (1) не обращается тождественно в нуль при $\omega \to 0$. Это может произойти, когда: 1) "Q-ток" не сохраняется (такая ситуация рассмотрена в [2]) и 2) "Q-ток" сохраняется, но симметрия рассматриваемого состояния нарушена, т. е. массовый оператор характеризуется не равным нулю макроскопическим параметром, неинвариантным относительно данного преобразования симметрии, в то время как энергия состояния при таком преобразовании не меняется. Такими макроскопическими параметрами являются: момент инерции деформированной капли (Σ не коммутирует с оператором момента $\mathbf{L}$), изоспин ядра при $N \neq Z$ (Σ не коммутирует с оператором изоспина $\vec{\tau}$), координата центра масс (ЦМ) конечной системы, и т. п. Вследствие указанного вырождения стандартные методы квантовой теории непосредственно неприменимы, и сначала нужно каким-то образом вырождение снять, например, наложить

---

1) Здесь совершен переход в смешанное представление. В дальнейшем мы будем часто использовать символическую запись и опускать квантовые числа и переменные, по которым проводится суммирование и интегрирование.

на систему внешнее поле, не коммутирующее с данным преобразованием симметрии [3]. Если рассматриваемое состояние стабильно, то достаточно очень слабого поля $V(x)$, чтобы снять вырождение и "заморозить" отвечающую этому параметру степень свободы (если с изменением внешних условий состояние системы приближается к критической точке, где оно перестает быть стабильным, то величина поля, необходимая для "удержания" некоторого фиксированного значения макроскопического параметра, резко возрастает). Так, чтобы выключить движение ЦМ сферической капли жидкости по оси x, достаточно поместить ее в прямоугольную яму $V(x)$ такой глубины, V_0, чтобы сделать амплитуду нулевых колебаний ЦМ малой по сравнению с расстоянием между частицами – только при этом условии имеет смысл измерение плотности. Простая оценка показывает, что глубина ямы при этом должна удовлетворять условию $V_0 >> \epsilon_0 A^{-4/3}$, где ϵ_0 – характерная энергия, A – число частиц в системе. Когда капля превращается в пар, то для "закрепления" ЦМ необходимо уже внешнее поле $V_0 \sim \epsilon_0$.

При наложении внешнего поля $V(x)$ появляется дивергенция "Q-тока" $D_Q \sim [Q, V]$. Устремляя частоту ω к нулю, из (1) получаем

$$\mathcal{T}(x, p, \epsilon; [D_Q]) = G^{-1}(x, p, \epsilon)\, Q(x) - Q(x) G^{-1}(x, p, \epsilon) \equiv [G^{-1}\, Q]$$

Отсюда следует, что $\mathcal{T}(\omega = 0; [D_Q])$ не зависит от величины V_0. Это означает, что вершина $\mathcal{T}(\omega; [D_Q])$ имеет полюс вблизи нуля, т. е.

$$\mathcal{T}(\omega; [D_Q]) = \frac{-\omega_0 [G^{-1}, Q]}{\omega - \omega_0}$$

(положение полюса ω_0 пропорционально величине поля V_0). Как видно из (1), полюса $\mathcal{T}[j_Q^0]$ и $\mathcal{T}[D_Q]$ совпадают, поскольку при малых ω в правой части никаких особенностей нет. Поэтому при $\omega \to \omega_0$

$$\mathcal{T}[j_Q^0] = \frac{[G^{-1}, Q]}{\omega - \omega_0}. \tag{2}$$

Вершина $\mathcal{T}[j_Q^0]$ в полюсе $\omega = \omega_0$ удовлетворяет стандартному однородному уравнению

$$\mathcal{T} = U G \mathcal{T} G, \tag{3}$$

где U – неприводимый блок в канале частица-дырка. Из сказанного выше следует, что мы в состоянии выбрать внешнее поле V_0 столь малым, чтобы частота ω_0 была мала по сравнению с характерными частотами ω_1 одночастичных переходов в правой части (3). Пренебрегая членами порядка ω_0/ω_1, из (2) и (3) получаем условие самосогласования

$$\Sigma(x, p, \epsilon) Q(x) - Q(x) \Sigma(x, p, \epsilon) =$$

$$= \int \frac{dx' dp' d\epsilon'}{(2\pi)^4 i} U(x, p, \epsilon; x', p', \epsilon') [G(x', p', \epsilon') Q(x') - Q(x') G(x', p', \epsilon')]. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь конкретные примеры. Для систем с нарушенной симметрией относительно сдвига (капель жидкости, кристаллов) условие (4) принимает вид

$$\frac{\partial\Sigma(x, p, \epsilon)}{\partial x} = \int \frac{dx'dp'd\epsilon'}{(2\pi)^4 i} U(x, p, \epsilon; x', p', \epsilon') \frac{\partial G(x', p', \epsilon')}{\partial x'} . \qquad (5)$$

Это соотношение можно перенормировать обычным в теории ферми-жидкости способом, вводя локальную амплитуду Γ^ω взаимодействия квазичастиц на поверхности Ферми:

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial x} = \Gamma^\omega A \frac{\partial G^{-1}}{\partial x} . \qquad (6)$$

Здесь A – интеграл по ϵ от полюсных частей G^q двух гриновских функций; $G^q(x, p, \epsilon) = a(x)[\epsilon - \mathcal{H}^q(x, p)]^{-1}$, где $\mathcal{H}^q = \frac{p^2}{2m^*} + U$.

Подчеркнем, что в (6) входит массовый оператор Σ, а не гамильтониан $\mathcal{H}^q$ квазичастиц (они совпадают друг с другом только при $m^* = m$ и $a = 1$; m^* – эффективная масса, a – перенормировочный множитель). В ядре определяющую роль играет нулевая гармоника Γ^ω, т. е. $\Gamma^\omega(x, x') = \Gamma^\omega(x)\delta(x - x')$. В частном случае, когда $m^* = m$ и $a = \text{const}$, для сферических ядер из (6) получаем $\frac{\partial U(x)}{\partial x} = F(x)\frac{\partial\rho(x)}{\partial x}$, где $F(x) = a^2\Gamma^\omega(x)$, а $\rho(x)$ – плотность квазичастиц. Аналогичное соотношение в несколько иной форме было получено в [4].

В системах со спариванием ситуация несколько меняется. Из-за появления бозе-конденсата связанных пар уравнение (3) становится неприменимым и вместо него теперь нужно писать систему более сложных уравнений. Тем не менее нетрудно показать, что и в этом случае для систем с нарушенной трансляционной инвариантностью условие самосогласования имеет вид, аналогичный (5):

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial x} = U\frac{\partial G_s}{\partial x} \qquad (7)$$

только здесь уже G_s – гриновская функция с учетом спаривания, а в величину Σ не включены переходы частицы в дырку и конденсатную пару. (Поскольку щель Δ определяется из однородного уравнения, то для нее никаких новых условий не получается).

Для систем с нарушенной вращательной симметрией условие самосогласования (4) принимает вид (в координатном представлении):

$$\left(x \times \frac{\partial}{\partial x} + y \times \frac{\partial}{\partial y}\right)\Sigma(x, y, \epsilon) =$$

$$= \int \frac{dx'dy'd\epsilon'}{2\pi i} U(x, y, \epsilon; x', y', \epsilon') \left[x' \times \frac{\partial}{\partial x'} + y' \times \frac{\partial}{\partial y'}\right] G(x', y', \epsilon'). \qquad (8)$$

В том же приближении, что и выше, оставляя только нулевую гармонику, для аксиально-симметричной деформированной капли получим простое соотношение $\frac{\partial U(r,\theta)}{\partial\theta} = F(r,\theta)\frac{\partial\rho(r,\theta)}{\partial\theta}$.

Подчеркнем, что для анизотропных сред и деформированных систем условия (8) и (5) должны выполняться одновременно.

Уравнение (4) можно обобщить на случай многокомпонентных систем (ионных кристаллов, атомов, и т. д,); при этом U, G, и Σ являются матрицами.

В некоторых случаях спонтанное нарушение симметрии может одновременно проявляться относительно дискретных и непрерывных групп преобразований. Так, Мигдалом [5] показано, что в ядерной материи при обычных плотностях возникает спаривание частица-дырка (конденсат π-мезонов). В результате в массовом операторе Σ нуклона появляется слагаемое вида $\Sigma^{s\ell}$ $[\cos(k_0 x)](\vec{\sigma}L)$. Таким образом, Σ перестает коммутировать не только с оператором сдвига и поворота, но и с операторами спина $\vec{\sigma}$, хотя исходный лагранжиан предполагается инвариантным относительно этих операций. При этом должно одновременно выполняться три условия самосогласования, два из которых аналогичны (5) и (8), а третье имеет вид

$$[\Sigma^{s\ell}, \vec{\sigma}] = U[G, \vec{\sigma}] \qquad (9)$$

(подобное условие получается и для "лейновской" части самосогласованного потенциала $\Sigma_\Lambda \vec{\tau}\, T$ в ядре при $N \neq Z$ [6]).

Отметим, что наличие нескольких условий самосогласования означает, что в системе существует несколько типов коллективных возбуждений, характеристики которых могут быть определены с помощью полученных соотношений. Эта проблема будет рассмотрена в следующей работе.

В заключение авторы приносят благодарность В.М.Галицкому, Б.Т.Гейликману, Г.А.Пик-Пичаку и М.А.Троицкому за плодотворное обсуждение.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
13 апреля 1973 г.

Литература

[1] А.А.Гриб, Е.В.Дамаскинский, В.М.Максимов. УФН, 102, 587, 1970.

[2] В.А.Ходель, С.А.Фаянс. ЯФ, 12, 717, 1970.

[3] Н.Н.Боголюбов. Препринт ОИЯИ, Р-1451, Дубна, 1963.

[4] H.I. Mikeska, W.Brenig. Z. Phys., 220, 321, 1969.

[5] А.Б.Мигдал. Препринт ИТФ, Т-13819, Черноголовка, 1972.

[6] А.Б.Мигдал. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер, М., изд. Наука, 1965; Д.Ф.Зарецкий, М.Г.Урин. Труды проблемного симпозиума по физике ядра, Тбилиси, 1967; Б.Л.Бирбраир. ЯФ, 5, 1198, 1967.