Письма в ЖЭТФ, том 17, вып.11, стр. 639 – 642 5 июня 1973 г.

ВЕРШИННЫЕ ФУНКЦИИ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР В (4 – ϵ)-МЕРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ.

С. Л. Гинзбург

Непосредственным суммированием диаграмм теории возмущений вычислены вершинные функции и поляризационный оператор в $(4-\epsilon)$-мерной теории поля со взаимодействием ϕ^4 при малых ϵ. Полученные выражения справедливы как в области применимости теории возмущений, так и в скейлинговой области.

Как хорошо известно [1], в четырехмерном пространстве с логарифмической точностью имеет место теория фазовых переходов Ландау. Поэтому естественно ожидать, что в $4-\epsilon$-мерном пространстве, при $\epsilon << 1$ отклонение от нее будет мало. Вильсон и Фишер [2] предложили использовать ϵ в качестве малого параметра для вычисления критических индексов. Вильсон [3], используя идеи ренорм группы, вы -

числил индексы с точностью до ϵ^3 и получил выражение для четыреххвостки в скейлинговой области. Цунето и Абрагамс [4], сделали то же самое применяя тождества Уорда. Однако, в этих работах не рашались уравнения теории поля.

С другой стороны Ларкин и Хмельницкий [1] показали, что в четырехмерной теории поля с взаимодействием ϕ^4 осуществляется логарифмическая ситуация и основной вклад в вершинные функции дают так называемые паркетные графики. Естественно, что и в $4-\epsilon$-мерной теории при $\epsilon << 1$ основной вклад также должны давать эти же графики, хотя логарифм заменится на степенную функцию с малым показателем ϵ. Это связано с тем, что при малом ϵ степенная функция также, как и логарифм, слабо меняется и велика.

В настоящей работе путем суммирования паркетных графиков в $4-\epsilon$-мерном пространстве получены явные выражения для вершинных функций и поляризационного оператора во всей области изменения импульсов и произведена сшивка с теорией возмущений. Показано, в частности, что в скейлинговой области коэффициент перед соответствующей степенью импульса в вершине с двумя концами и одним углом и в поляризационном операторе является степенной функцией ϵ с нецелым показателем. Выражение для четыреххвостки в скейлинговой области переходит в результаты работ [3, 4].

Будем рассматривать теорию n-компонентного поля ϕ_a с взаимодействием $\sum_{\alpha\beta} \phi_\alpha^2 \phi_\beta^2$. Нулевая функция Грина равна $G_0(k) = (r_0 + k^2)^{-1}$, а затравочная вершина $v_0 \Lambda^\epsilon \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu}$, где Λ – импульс обрезания, а v_0 – безразмерный параметр, причем $v_0 << 1$.

Рассмотрим вершинную часть $\Gamma(q_1, q_2, q_3)$ в случае, когда все импульсы одного порядка. Тогда Γ является функцией одного аргумента и суммируя паркетные диаграммы [1, 5] для нее получаем следующее уравнение :

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu\nu}(q) = \Gamma(q)(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}),$$
$$\Gamma(q) = v_0 \Lambda^\epsilon - (n+8) \int_q^\Lambda \frac{d^d p}{(2\pi)^d} G^2(p)\, \Gamma^2(p)\,, \qquad (1)$$

где d – размерность пространства. Считая, что индекс η равен нулю положим :

$$G(p) = p^{-2}, \qquad \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \longrightarrow \mathcal{K}_d\, p^{3-\epsilon} dp\,,$$

$$\mathcal{K}_d = 2^{-(d-1)} \pi^{-d/2} [\Gamma(d/2)]^{-1}$$

сделаем замену переменных $y = (\Lambda/q)^\epsilon$, продифференцируем по y и решим полученное дифференциальное уравнение. В результате получим:

$$\Gamma(q) = u_0 \Lambda^{\epsilon} t^{-1},$$
$$t = 1 + \frac{n+8}{\epsilon} \mathcal{K}_d u_0 \left[\left(\frac{\Lambda}{q} \right)^{\epsilon} - 1 \right]. \tag{2}$$

Уравнения для вершины $F_{\alpha\beta}(q)$, изображаемой графиками с двумя концами и одним углом и для поляризационного оператора $\Pi(q)$ имеют вид [1]:

$$F_{\alpha\beta}(q) = \delta_{\alpha\beta} - \int_q^{\Lambda} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} F_{\mu\nu}(p)\, G^2(p)\, \Gamma_{\mu\nu\alpha\beta}(p),$$

$$\Pi(q) = \int_q^{\Lambda} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} F_{\alpha\beta}(p) F_{\alpha\beta}(p)\, G^2(p). \tag{3}$$

Полагая $F_{\alpha\beta} = F\delta_{\alpha\beta}$ и решая (3) также, как и (1), получим:

$$F = t^{-(n+2)/(n+8)},$$

$$\Pi = \frac{n}{4-n} \frac{1}{u_0 \Lambda^{\epsilon}} \left[t^{(4-n)/(n+8)} - 1 \right]. \tag{4}$$

Из (2) и (4) получаем при $q << \Lambda$, полагая $K_d \approx K_4$

$$\Gamma = \frac{8\pi^2 \epsilon}{n+8} q^{\epsilon}, \quad F = \left[\frac{\Gamma}{u_0 \Lambda^{\epsilon}} \right]^{(n+2)/(n+8)},$$

$$\Pi = \frac{n}{4-n} \frac{1}{u_0 \Lambda^{\epsilon}} \left[\frac{\Gamma}{u_0 \Lambda^{\epsilon}} \right]^{-(4-n)/(n+8)} \tag{5}$$

Первая формула в (5) была получена ранее в [3, 4]. Из (5) видно, что коэффициент при степенях q в F и Π пропорциональны $\epsilon^{(n+2)/(n+8)}$ и $\epsilon^{-(4-n)/(n+8)}$ и их нельзя разлагать в ряд по ϵ.

Для определения индекса γ используем тождество Уорда [1]:

$$\frac{dr}{dr_0} = F(0), \qquad r = G^{-1}(0). \tag{6}$$

Поскольку при $q \to 0$ q переходит в $\sqrt{r}$, то

$$r \sim \epsilon^{(n+2)/(n+8)} (r_0 - r_{0c})^{\gamma}, \qquad \gamma = 1 + \epsilon \frac{(n+2)}{2(n+8)} \tag{7}$$

r_{0c} – критическое значение r_0. Выражение для γ было ранее получено в [3, 4]. Теплоемкость c пропорциональна $\Pi(0)$, поэтому

$$c \sim \epsilon^{-(4-n)/(n+8)} (r_0 - r_{0c})^{-\epsilon \frac{4-n}{2(n+8)}} . \qquad (8)$$

Ленинградский
институт ядерной физики
им. Б.П.Константинова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
27 апреля 1973 г.

Литература

[1] А.И.Ларкин, Д.Е.Хмельницкий. ЖЭТФ, 56, 2087, 1969.

[2] K.G.Wilson, M.E.Fisher. Phys. Rev. Lett., 28, 240, 1972.

[3] K.G.Wilson. Phys. Rev. Lett., 28, 548, 1972.

[4] T.Tsuneto, E.Abrahams. Phys. Rev. Lett., 30, 217. 1973.

[5] И.Т.Дятлов, В.В.Судаков, К.А.Тер-Мартиросян. ЖЭТФ, 32, 767, 1957.