Письма в ЖЭТФ, том 17, вып. 12, стр. 693 – 698 *20 июня 1973 г.*

0^+ СОСТОЯНИЯ α-ЧАСТИЦЫ В МОДЕЛИ С СЕПАРАБЕЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

И. М. Народецкий, Е. С. Гальперн, В. Н. Ляховицкий

В настоящей статье мы рассматриваем новый подход к задаче четырех нуклонов, основанный на применении многочастичных интегральных уравнений. Этот подход свободен от недостатков обычно используемых вариационных методов [1] и одинаково применим при расчете как дискретного, так и непрерывного спектра. В частности, в этом методе легко получаются практически точные результаты для состояний кластерного типа, для которых метод гиперсферических функций [2] дает ухудшенную сходимость и требует модификации [3]. Ниже мы представляем первые расчеты такого рода для 0^+ состояний α-частицы с учетом спиновой зависимости нуклон-нуклонного взаимодействия. Следует подчеркнуть, что учет спиновых эффектов методически существенно усложняет решение задачи сравнительно с выполненными ранее "бесспиновыми" расчетами малонуклонных систем. С другой стороны, при использовании реалистических нуклон-нуклонных потенциалов нет никаких оснований пренебрегать силами, зависящими от ориентаций спинов. Мы рассмотрели вариант интегральных уравнений типа Якубовского [4], которые при использовании сепарабельного представления для двухчастичной T-матрицы имеют вид двумерных интегральных уравнений [5, 6]. Одним из методов решения такого рода уравнений является метод сепарабельной аппроксимации амплитуд для подсистем 3 * 1 и 2 * 2, через которые выражаются ядра четырехчастичных уравнений.

Сепарабельная аппроксимация, позволяющая привести уравнения к одномерному виду, возможна многими способами. Мы используем здесь способ, основанный на разложении типа Гильберта-Шмидта. Как мы увидим ниже этот метод позволяет уже в первом приближении получить с процентной точностью энергию связи основного состояния; другое важное преимущество метода заключается в том, что он позволяет существенно уменьшить число решаемых уравнений. Метод Гильберта –

Шмидта, хорошо известный в применении к двухчастичной амплитуде [7] успешно использовался для решения 3-х частичных уравнений [8]. Обобщение метода для трехчастичных амплитуд было получено в [9]; аналогичные результаты имеют место и для амплитуд 2 * 2.

Для иллюстрации сходимости метода мы рассмотрим вначале простейший случай тождественных бозонов [10], взаимодействующих посредством триплетного сепарабельного потенциала типа Ямагучи [11]. Ниже использованы обозначения работ [6, 9], параметры потенциалов приведены в [9], константа $1/2m$, где m – масса нуклона, равна 20,73622 *Мев* $\cdot$ *ф*^{2}.

Формфактор в системе 4-х тождественных частиц выражается через две функции $A(\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}\mid z)$ и $B(\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}\mid z)$. Для сепарабельного взаимодействия можно отделить зависимость от k в функциях A и B:

$$A(k,\ \mathbf{p},\mathbf{q}\mid z) = \sqrt{\frac{\lambda}{2m}}\ \frac{g(k)\,a\ (\mathbf{p},\mathbf{q}\mid z)}{d\left(z-\frac{p^2}{2m}-\frac{q^2}{2m}\right)}$$

$$B(k,\ p,\ \mathbf{q}|z) = \sqrt{\frac{\lambda}{2m}}\ \frac{g(k)\,b\,(p,\ \mathbf{q}|z)}{d\left(z-\frac{p^2}{2m}-\frac{q^2}{2m}\right)}\ . \qquad (1)$$

Для состояния $L^P = 0^+$ функция $b(p,\ q\mid z)$ зависит только от модулей векторов p и q. Мы будем пренебрегать вкладом трехчастичных конфигураций с $\ell \neq 0$, при этом функция $a(p,q\mid z)$ также не зависит от угловых переменных. Введем далее собственные функции $w_m(p\mid z)$ $[v_m(p\mid z)]$ и собственные значения $\eta_m(z)[\xi_m(z)]$ для 3 * 1 и 2 * 2 амплитуд. Для 3*1 подсистем эти величины определены формулами (8, 10) работы [9], аналогично определены величины v_m, ξ_m. Разложим формфакторы a, b в ряд по собственным функциям w_m и v_m:

$$a(p,q|z) = \Sigma w_m\left(p\,|\,z-\frac{q^2}{2m}\right)a_m(q\mid z)\ ,\ b(p,q|z) = \sum_m v_m\left(p\,|\,z-\frac{q^2}{2m}\right)b_m(q|z)\,. \qquad (2)$$

Используя ортонормированность w_m и v_m, мы получаем систему уравнений для функций a_m, b_m. В соответствии с общей структурой уравнений Якубовского a_m, b_m, эту систему можно записать только для a_m, при этом функции b_m выражаются через a_m посредством интегрального оператора. Однородная система с собственным значением $\mu(z)$ имеет вид:[1)]

$$a_m(q|z) = \mu^{-1}(z)\left\{\Phi_m\left(z-\frac{q^2}{2m}\right)\sum_n \int K_{mn}(q,q'|z)\,a_n(q'|z)\,q'^2dq'\right\}, \qquad (3)$$

[1)] Дискретные уровни z_i определяются из условия: $\mu_i(z_i) = 1$.

где

$$K_{mn}(q, q'|z) = C_{mn}(q, q'|z) + \sum_k \int D_{mk}(q, q''|z)\Psi_k\left(z - \frac{q''^2}{2m}\right)D_{nk} \times$$

$$\times (q', q''|z)q''^2 dq'', \qquad (4)$$

$$\Phi_m(z) = \eta_m(z)/[1 - \eta_m(z)], \quad \Psi_m(z) = \xi_m(z)/[1 - \xi_m(z)], \qquad (5)$$

$$C_{mn}(q, q'|z) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^3 \int_{-1}^{1} w_m\left(Q_1 | z - \frac{q^2}{2m}\right) w_n\left(Q_2 | z - \frac{q'^2}{2m}\right) \times$$

$$\times d^{-1}\left[z - \frac{1}{2m}(q^2 + Q_1^2)\right] dx \qquad (6)$$

$$D_{mn}(q, q'|z) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 \int_{-1}^{1} w_m\left(S_1|z - \frac{q^2}{2m}\right) v_n\left(S_2|z - \frac{q'^2}{2m}\right) \times$$

$$\times d^{-1}\left[z - \frac{1}{2m}(q^2 + S_1^2)\right] dx. \qquad (7)$$

Кратность системы (3) равна числу N_η учитываемых собственных значений трехчастичной подсистемы, число же N_ξ определяет точность вычисления ядра. В таблице 1 представлены результаты расчетов энергии основного (z_1) и возбужденного (z_2) состояний для различных значений N_η и N_ξ.

0^+ состояния 4-х тождественных бозонов

N_η	N_ζ	z_1, *Мэв*	z_2, *Мэв*
1	1	-87,67	–
2	2	-90,01	-25,98
3	3	-90,09	-26,48
4	4	-90,10	-26,64

Отметим, что уже первое приближение $N_\eta = N_\xi = 1$, дает энергию связи основного состояния с точностью ~ 3%, приближение $N_\eta = N_\zeta = 2$ дает энергию связи возбужденного состояния с такой же точностью. Наш окончательный результат: $z_1 = -90{,}10$ *Мэв*, $z_2 = -26{,}64$ *Мэв* следует сравнить с результатами работы [10]: $z_1 = -84{,}66$ *Мэв*, $z_2 = -24{,}87$ *Мэв* (напомним, что метод Бейтмана с двумя сепарабельными членами использованный в [10], дает также завышенное значение первого двухчастичного порога: $z_0 = -24{,}55$ *Мэв* вместо $z_0 = -25{,}56$ *Мэв*). Мы видим, что результаты качественно совпадают, однако, метод Гильберта – Шмидта дает лучшую точность.

Учтем теперь спиновую и изоспиновую зависимость нуклон-нуклонных сил. Мы выбрали триплетное ($i = 0$) и синглетное ($i = 1$) взаимодействие в виде сепарабельного s-волнового потенциала Ямагучи.

Функции A в (1), помимо значений полного спина S и изоспина T характеризуется также значением спина σ и изоспина τ выделенной тройки частиц, а также значением изоспина i выделенной пары частиц. Функции B характеризуются, помимо S, T, значениями изоспина i, j двух пар частиц. Общие результаты для различных значений S, T получены в [6]. Ниже мы рассмотрим состояние $S = T = 0$. В этом случае $\sigma = \tau = 1/2$, а индексы i, j у функции B принимают одинаковые значения $i = j = 0$ и $i = j = 1$. Таким образом, мы имеем две функции $A_i(k, p, q|z)$ и 2 функции $B_i(k, p, q|z)$. Полагая $A_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{2m}}\frac{g_i a_i}{d_i}$, $B_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{2m}}\frac{g_i b_i}{d_i}$, пишем разложение типа (2) в виде:

$$a_i(p, q|z) = \sum_m w_{im}\left(p\,\middle|\,z - \frac{q^2}{2m}\right)a_m(q|z)\,,$$

$$b_i(p, q|z) = \sum_m v_{im}\left(p\,\middle|\,z - \frac{q^2}{2m}\right)b_{im}(q|z)\,, \tag{8}$$

где w_{om}, w_{1m} – пара трехчастичных собственных функций с квантовыми числами $\sigma = \tau = 1/2$, отвечающие собственным значениям $\eta_m^{1/2\ 1/2} \equiv \eta_m$ [см. [9], формулы (18,19)], а $v_{om}[v_{1m}]$ – собственные функции для 2*2 канала, отвечающие собственным значениям $\xi_{om}[\xi_{1m}]$.

Система уравнений для функций a_m снова имеет вид (3), где

$$K_{mn}(q, q'|z) = \sum_i \left\{C^i_{mn}(q, q'|z) + \sum_k \int D^i_{mk}(q, q''|z)\,\times\right.$$

$$\left.\times\, \Psi^i_k\left(z - \frac{q''^2}{2m}\right)D^i_{nk}(q', q''|z)\, q''^2 dq''\right\}, \tag{9}$$

а величины Ψ^i_k, C^i_{mn}, D^i_{mn} выражаются по формулам (5) – (7) соответственно через ξ_{im}, w_{im} и v_{im}. Результаты расчетов представлены в таблице 2, где через $N^{(+)}_\eta$ и $N^{(-)}_\eta$ обозначено число положительных и отрицательных собственных значений для трехчастичной задачи[1].

0^+ состояния α-частицы

$N^{(+)}_\eta$	$N^{(-)}_\eta$	N_ζ	z_1, *Мэв*	z_2, *Мэв*
1	0	1	- 44,29	–
1	0	4	- 44,54	- 11,06
2	1	4	- 45,69	- 11,39
3	2	4	- 45,73	- 11,63
4	3	4	- 45,73	- 11,69

[1] Напомним, что дублетные трехчастичные амплитуды не положительно определены и имеют большие по абсолютной величине отрицательные собственные значения [9].

Наш окончательный результат: $z_1 = -45{,}73$ *Мэв*, $z_2 = -11{,}69$ *Мэв*. Вычитая пороговую энергию ($z_0 = -11{,}03$ *Мэв*), получаем $E_1 = z_1 - z_0 = -34{,}70$ *Мэв*, $E_2 = z_2 - z_0 = -0{,}66$ *Мэв*. Экспериментальные значения, отсчитываемые от энергии связи трития ($-8{,}484$ *Мэв*) равны: $E_1 = -19{,}840$ *Мэв* и $E_2 = +0{,}4$ *Мэв* [12]. Мы видим, таким образом, что потенциал Ямагучи пересвязывает основное состояние 4-х частичной системы гораздо сильнее, чем для 3-х частичной (для тритона пересвязанность равна 2,55 *Мэв*). Весьма примечательно, однако, что в наших расчетах, как для тождественных бозонов, так и для случая сил, зависящих от спина, возбужденное 0^+ состояние лежит вблизи pT порога, как это наблюдается на опыте (основные состояния для этих случаев различаются почти на 45 *Мэв* !). Это обстоятельство требует дальнейшего теоретического рассмотрения.

В заключение отметим, что наши точные результаты близки к результатам, полученным в кластерном приближении $4 \doteq 3 * 1$ [13] в уравнениях типа Омнеса [14]. В этом приближении мы получили z_1 (Омнес) $= -39{,}6$ *Мэв*[2]. Это число всего на 10% отличается от точного значения. Аналогичное приближение в уравнениях Якубовского дает z_1(Якубовский) $= -26{,}24$ *Мэв*. Возбужденный 0^+ уровень в этом случае не появляется. Мы видим, таким образом, что вклад канала $3 * 1$ в уравнениях Омнеса и Якубовского оказывается совершенно различным. Последнее обстоятельство не удивительно, поскольку подклассы графиков теории возмущений, суммируемые в данном кластерном приближении в уравнениях Омнеса и Якубовского также существенно различаются.

Авторы благодарят Ю.А.Симонова, К.А.Тер-Мартиросяна за интерес к работе и И.С.Шапиро за полезные замечания.

Институт теоретической
и экспериментальной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24 апреля 1973 г.
После переработки
30 мая 1973 г.

Литература

[1] P.E.Argan, G.C.Mantovani, P.Marazzini et al,Nuovo Cim., Suppl, 3. 245, 1965. Proc. of the 9-th summer meeting of nucl. Phys., Herceg-novi, Iuly, 1964; B.H.Bransden, Nuclear Forces and the Few-Nucleon Problem, v.II, Pergamon Press, 1960. Proc. on Clustering Phenomena in Nuclei, Bochum, Germany, 1969.

[2] А.М.Бадалян, Е.С.Гальперн, В.Н.Ляховицкий и др. ЯФ, 6, 473, 1967.

[3] А.И.Базь, М.В.Жуков. ЯФ, 16, 958, 1972.

[4] О.А.Якубовский. ЯФ, 5, 1312, 1967. L.D.Faddeev. Three-body Problem in Nuclear and Particle Physics, eds J.S.C. McKee and P.M.Rolph (North-Holland, Amsterdam, 1970) p. 154.

[5] V.F.Kharchenko V.E.Kuzmichev. Nucl. Phys. A183, 106, 1972. E A196, 636, 1972.

[2] Возбужденный 0^+ уровень лежит при этом вблизи pT-порога.

[6] И.М.Народецкий, И.Л.Грач. ЯФ, 18, №2, 1973.

[7] S.Weinberg. Phys. Rev., 131, 440, 1963. L.D.Faddeev. Proc. of the Fifth Intern. Conf. on the Physics of Electronic and Atomic Colisions, ed S.H.Branscomb (Boulder, Colorado, 1968), p.145, И.М.Народецкий. ЯФ, 9, 1086, 1969.

[8] А.Г.Ситенко, В.Ф.Харченко. УФН, 103, 469, 1971.

[9] И.М.Народецкий, Е.С.Гальперн, В.Н.Ляховицкий. ЯФ, 16, 607, 1972, Письма в ЖЭТФ, 15, 544, 1972.

[10] V.F.Kharchenko, V.E.Kuzmichev. Phys. Lett., 42B, 328, 1972.

[11] Y.Yamaguchi. Phys. Rev. 95, 1628, 1954.

[12] W.Meyerhof, T.Tombrello. Nucl. Phys. A109, 1, 1968.

[13] И.М.Народецкий, В.Н.Ляховицкий, Е.С.Гальперн. Письма в ЖЭТФ, 16, 431, 1972; И.М.Народецкий. ЯФ, 18, 67, 1973.

[14] R.Omnes. Phys. Rev., B165, 1265, 1968; И.М.Народецкий, О.А.Якубовский. ЯФ, 14, 315, 1971.