

ОБ ОБЩЕМ СВОЙСТВЕ РЕШЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА, ЗАКЛЮЧАЮЩЕМСЯ В ОБРАЗОВАНИИ РАЗРЫВОВ НА ЖИДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Н.А.Иногамов¹⁾

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН
117940 Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 октября 1994 г.

После переработки 30 ноября 1994 г.

Рассмотрена эволюция границы η . Обнаружен коллапс, заключающийся в самоформировании сингулярностей на общего вида изначально всюду гладких решениях задачи Коши. Коллапс происходит за конечное время t_{sing} . Существенным продвижением является то, что анализ отправляется от уравнений, учитывающих реальную сильную нелинейность²⁾. Кроме того, впервые сингулярность обнаружена во впадинах между выбросами³⁾, так сказать "между пальцами"⁴⁾. Представлены детали пред- и послеколлапсных стадий.

Вопросы динамики свободной границы или контурной динамики возникают при исследовании неустойчивостей в пинчах [1], в токамаках [2], при лазерном метании [3,4] и во многих других важнейших физических приложениях. Интересна и фундаментальная проблематика, связанная с изучением структуры решений уравнений математической физики, в особенности с гидродинамическим коллапсом в уравнениях Эйлера. Ей уделяется очень много внимания последнее время. Достаточно упомянуть самые недавние работы [5,6].

Рассмотрим общие решения классической [7-9] краевой задачи:

$$\Delta\varphi = 0, \quad k(x, t) = 0, \quad d(x, t) = 0 \quad k = K(x, y, t)|_{y=\eta(x,t)}, \quad d = D(x, y, t)|_{y=\eta(x,t)},$$

$$K = \eta_t + \varphi_x \eta_x - \varphi_y, \quad D = \varphi_t + (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)/2 + p/\rho - gy, \quad p|_{\eta} = 0, \quad \varphi(x, y \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad (1)$$

где кривая $\eta \leq y < \infty$ ограничивает жидкость, $k = 0$ и $d = 0$ - соответственно кинематическое и динамическое граничные условия, φ - потенциал скорости ($v = \nabla\varphi$), g - y -компонента гравитационного ускорения.

Разложим решения этой задачи в следующие ряды:

$$f = \sum_{n=1}^N (A_n(t)/n) \exp(n(S_0 + iz)), \quad f = \varphi + i\psi, \quad z = x + iy, \quad \eta = \sum_{n=0}^N S_n x^{2n}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) видим, что значения $g = 1, 0$ и -1 относятся к стоячим гравитационным волнам, неустойчивости Рихтмайера-Мешкова и неустойчивости

¹⁾ E-mail: Nail@landau.ac.ru

²⁾ Слабонелинейное приближение справедливо при значительных удалениях сингулярностей от границы. Для учета сильной нелинейности используются разложения высокого порядка и изучается сходимости результатов по этим порядкам.

³⁾ Ранее, на основе слабонелинейных приближений, приводящих к уравнениям, аналогичным газодинамическим с отрицательным давлением и мнимой скоростью звука, предсказывалось появление сингулярностей в точках акустических катастроф, которым соответствуют выбросы жидкости.

⁴⁾ Жидкие выбросы или струи часто называют также пальцами.

Рэлея–Тейлора соответственно. При исследованиях эволюции такого вида всегда молчаливо предполагается, что в начальный момент амплитуды старших гармоник экспоненциально убывают: $A_n(0) \sim c^{-n}$, $c > 1$ при $n \gg 1$. Отсюда, как можно показать, следует, что за конечное время короткомасштабные неустойчивости не могут испортить гладкость решений.

Представим левые части краевых условий (1) в виде рядов по x^2 : $k = \sum k_n x^{2n}$, $d = \sum d_n x^{2n}$, где $n = 0, 1, \dots, N$. Тогда, согласно (1), эволюция контура η описывается динамической системой $\dot{k}_n = 0$, $\dot{d}_n = 0$, которая после подстановки в нее разложений (2) и длинных преобразований принимает вид

$$\dot{A}_i = \sum_{j=1}^N (G^{-1})_{ij} (g S_j + \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N M_{jkm} A_k A_m), \quad \dot{S}_i = \sum_{j=1}^N D_{ij} A_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Полиномиальные по S_n коэффициенты G , M и D (3) рассчитаны при $N \leq 6$. Эти полиномы в высших аппроксимациях исключительно громоздки и требуют отдельного представления.

В одномодовом ($N = 1$) приближении система (3) сводится к уравнению: $dU/dR = 2(U R + g) / (R(R-1)(R-3))$, где $U = A_1^2$ и $R = -(2S_1)^{-1}$ – радиус кривизны кривой $\eta(x, t)$ в точке $x = 0$. Отсюда следует гораздо более простое и исчерпывающее по сравнению с предыдущим [10,11] описание случая $g = -1$. Кроме того, удается полностью проинтегрировать траектории в случае $g = 0$, который ранее не рассматривался ⁵⁾.

В высших многомодовых приближениях $1 < N \leq 6$ система (3) интегрировалась численными методами. Оказалось, что имеющие физический смысл траектории, эволюционирующие из широкой порядка единицы окрестности точки гидростатического равновесия, притягиваются к гиперповерхности G_{crit} , на которой происходит вырождение матрицы коэффициентов G_{ij} при ускорениях \dot{A}_n , см. (3). Выражения для детерминантов $|G|_N$, где N указывает порядок аппроксимации, являются громоздкими полиномами по S_n . Они имеют вид

$$\begin{aligned} |G|_1 &= -\frac{1}{2} - S_1, \{2\}; & |G|_2 &= -\frac{1}{8} - \frac{19S_1}{24} - \frac{3S_1^2}{2} - \frac{S_1^3}{2} - \frac{S_2}{2}, \{5\}; \\ |G|_3 &= \frac{1}{48} + \frac{389S_1}{1440} + \dots, \{14\}; & |G|_4 &= \frac{1}{384} + \frac{6893S_1}{120960} + \frac{3927773S_1^2}{7257600} + \dots, \{41\}; \\ |G|_5 &= -\frac{1}{3840} - \frac{83341S_1}{9676800} - \frac{790583881S_1^2}{6096384000} - \dots, \{126\} \\ |G|_6 &= -\frac{1}{46080} - \frac{6448957S_1}{6386688000} - \dots - \frac{127S_1 S_4 S_6}{576} - \frac{7S_1^2 S_4 S_6}{16} - \frac{13S_1^3 S_4 S_6}{48} - \frac{S_2 S_4 S_6}{48}, \{385\}. \end{aligned}$$

Здесь в фигурных скобках приводится число слагаемых в соответствующем полиноме.

При приближении к гиперповерхности G_{crit} значения \dot{A}_n неограниченно растут, а фурье-разложение (2) потенциала расходится. Поскольку это разложение сходится в полуплоскости $y > y_{up}$, ограниченной снизу y -координатой самой верхней сингулярности y_{up} потенциала, то отсюда следует, что эта сингулярность S_{up} подходит вплотную к поверхности η .

⁵⁾То есть найден и проинтегрирован аналог решения Лэйцера [10] в случае неустойчивости Рихтмайера–Мешкова.

Сравнение расчетов с $N = 1$ и $N > 1$ приводит к выводу о качественном отличии этих двух случаев. При $N = 1$ решения (3) существуют всегда: $0 \leq t < \infty$. Причем при $t \rightarrow \infty$ эти решения стремятся к асимптотическому. В то время как при $N > 1$ всюду гладкие решения ограничены конечным промежутком времени: $0 \leq t < t_{sing}$. В момент t_{sing} траектории достигают G_{crit} .

Много внимания было уделено тщательному исследованию сходимости результатов при старших значениях N . Находились разницы между траекториями и моментами t_{sing} , соответствующими последовательным значениям N , то есть между $N = 6$ и $N = 5$, между $N = 5$ и $N = 4$ и т.д. Оказалось, что эти разницы быстро убывают с ростом N . Это означает, что полученные результаты действительно отражают реальную специфику исследуемой системы.

Подход верхней сингулярности S_{up} к границе η в точке вершины впадины S_0 (см. рис. 1 а и б) вместе с обращением ускорений \dot{A}_n в бесконечность указывают на изложенное ниже объяснение причин коллапса. Отсюда же следуют указания относительно структуры решения после коллапса.

Рассмотрим границу $\eta(x, t)$ и ее кривизну, см. рис. 1а и а', где $R(x, t) = (\sqrt{1 + \eta_x^2})^3 / \eta_{xx}$. Знак R и расположение области, занятой жидкостью, в пространстве таковы, что вогнутым в сторону жидкости впадинам соответствуют участки с $R < 0$, а выпуклым - струи j с $R > 0$, см. рис. 1 а и а'. Максимально вогнутым участком на η является окрестность вершины S_0 , см. максимумы на зависимости $R(x, t)$ от x в точках $2\pi n$. Поэтому изобары сгущаются около S_0 и происходит самозаострение вершины. В момент коллапса t_{sing} радиус R обращается в нуль в точках $x = 2\pi n$, см. рис. 1 б', а кривая η образует стрельчатую арку с некоторым углом δ при вершине, см. рис. 1 б и рис. 2. Здесь τ - касательная к η в S_0 . Около момента t_{sing} и в окрестности вершины предколлапсное решение автомодельно ⁶⁾.

С формированием клинообразной вершины предколлапсная эволюция завершается. Далее происходит разрыв вершины. При этом образуется пузырек b_N и два заострения S_{cusp}^l и S_{cusp}^r , показанные на рис. 2. Граница пузырька b_N является отрезком новообразованной границы η . Это связано с тем, что лагранжевы частицы, находящиеся на границе b_N , в момент коллапса были собраны в вершине S_0 .

Вершины заострений $S_{cusp}^{l,r}$ двигаются по инерции, поскольку в их окрестности $\nabla p = 0$. Из автомодельных соображений следует, что приращение скорости вершины S_0 в момент t_{sing} не может быть конечной величиной. Поэтому вершины левого и правого заострений совпадают ($S_{cusp}^l = S_{cusp}^r$, см. рис. 2), а их траектория дается инерционным выражением: $y_{cusp}(t) = S_0(t_{sing}) + (t - t_{sing})\dot{S}_0(t_{sing}) + (t - t_{sing})^2 g/2$.

Уединенные заострения обычно представляют собой точки ветвления потенциала, в которых заканчиваются разрезы, являющиеся линиями распределенных источников. В нашем случае точки заострения сдвоены. Возможно, что и в этом случае сингулярность S_{up} около вершины S_0 является точкой ветвления, а при $t > t_{sing}$ к заострениям $S_{cusp}^{l,r}$ подходит разрез.

Было выполнено детальное сопоставление (см. рис. 3) теоретических данных, полученных интегрированием (3), и данных численных экспериментов,

⁶⁾ Определение значений угла излома и характеристик автомодельности потребует численного моделирования на более подробных сетках чем те, о которых пойдет речь ниже.

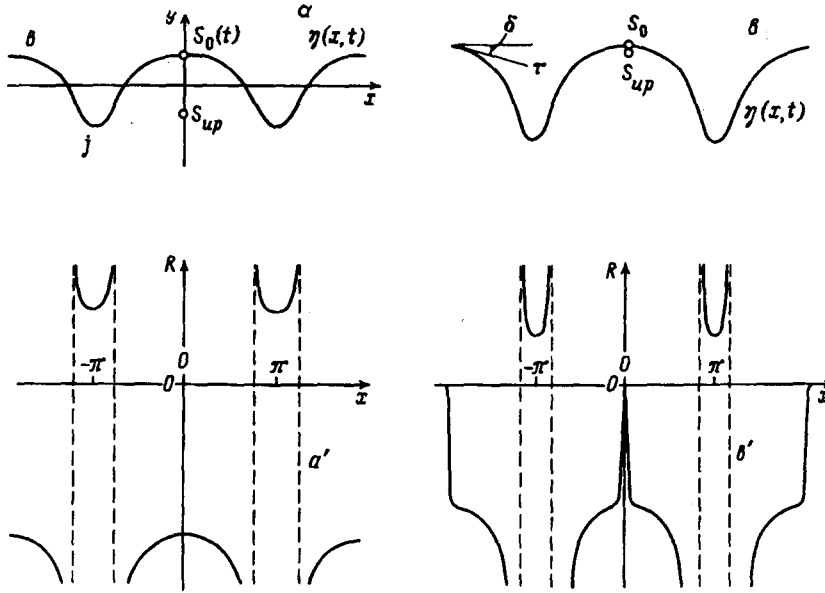


Рис.1. Предколлпсная эволюция формы границы и ее кривизны. a, b – Формы η . $S_0(t)$ – y -координата вершины впадины в лабораторной системе координат, см. разложения (2). Точка S_{up} соответствует самой верхней из множества сингулярностей потенциала, b – впадины, j – струи или выбросы. a', b' – Зависимости $R(x,t)$ от x . Чередование вогнутых и выпуклых участков. Значения $R = \infty$ относятся к точкам перегиба η . b, b' Прикосновение сингулярности S_{up} к вершине S_0 и образование излома с углом δ в S_0 в момент коллапса t_{sing}

произведенных А.В.Чехловым по просьбе автора. Для последних были привлечены давно апробированные коды искусственной сжимаемости [12] и крупных частиц [13]. Расчеты, проведенные этими двумя совершенно разными кодами, удовлетворительно согласуются между собой. Оказалось также, что теория подтверждается проведенными экспериментами. А именно, согласуются формы границы и скорости ее перемещения при $t < t_{sing}$ и значения моментов t_{sing} . В экспериментах также наблюдаются пузырьки b_N и заострения S_{cusp}^l и S_{cusp}^r при $t > t_{sing}$.

Отметим эффект, связанный с нижней жидкостью. Из-за ее несжимаемости должно обеспечиваться поступление этой жидкости внутрь расширяющегося пузырька b_N . Это означает, что окрестность точек S_{cusp} , см. рис. 2, либо прорывается, либо растягивается и прижимается к поверхности пузырька b_N . При плотности нижней жидкости $\rho_l = 0$ эта окрестность инфинитиземальна.

Представленная теория охватывает случай, когда равно нулю отношение плотностей $\mu = \rho_l / \rho$ жидкостей, находящихся по разные стороны от границы η . Между тем, при использовании численных кодов [12] и [13] приходится ограничиваться расчетом случаев с конечными значениями μ . Это обусловлено снижением экономичности и надежности расчетов при чрезмерно малых значениях μ . В связи с этим требуется обсудить влияние малых, но конечных значений μ на результаты.

Сравним решения с $\mu = 0$ и $\mu \ll 1$. При $\mu \neq 0$ на конце струи j (рис. 1 а) с течением времени формируется грибовидное образование [14] (ниже -

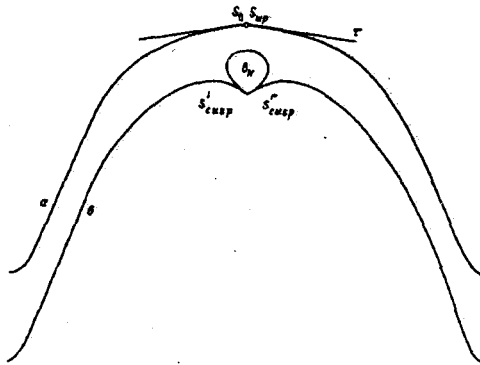


Рис.2. Послеколлапсная эволюция $\eta(x, t)$. Кривая a : $t = t_{sing}$, из вершины S_0 выпущены касательные. В момент коллапса точки S_{sup} и S_0 сливаются. Кривая b : $t > t_{sing}$. Заострения S_{sup}^l и S_{sup}^r совпадают

гриб). Оценка суммарной амплитуды возмущения y_{Σ} (то есть расстояния по вертикали между вершинами впадины S_0 и струи j , см. рис. 1 а). в момент зарождения гриба t_{mush} дается выражением $y_{\Sigma}(t_{mush}) \approx y_{mush} \approx 0.27 \mu^{-2/3}$ [14]. Анализ численных экспериментов указывает на то, что процесс зарождения гриба состоит из формирования излома на η , разрыва η в вершине излома и появления пузырька (дуга между точками a и b на рис. 3) и двух заострений a и b . На рис. 3 дан вариант с $\mu = 0.1$. При этом $t_{mush} \approx 1.5$. Причем приведенная выше оценка $y_{\Sigma}(t_{mush})$ дает на 50% завышенное значение.

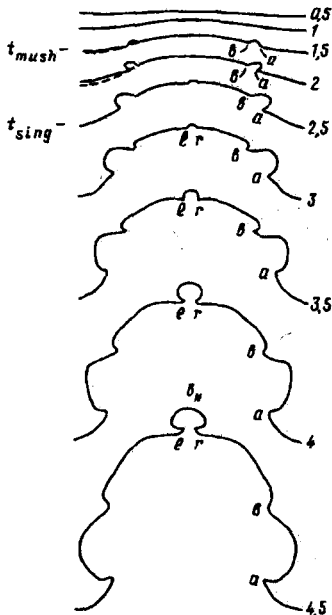


Рис.3. Сравнение теоретической (штриховые кривые, показаны только симметричные половины) и экспериментальной (сплошные кривые) эволюций η . Выход сингулярностей на границу и образование разрывов и заострений. Цифры у кривых указывают время. Буквами l и r обозначены точки S_{sup}^l и S_{sup}^r соответственно. Из-за того, что при численном моделировании $\mu \neq 0$, эти точки разнесены, а не сведены, как на рис. 2. Хорошо виден пузырек b_N при вершине впадины, ограниченный точками l и r . Он появляется при $t > t_{sing}$. Для данного варианта $t_{sing} \approx 2.5$. Теория дает $t_{sing} \approx 2.7$. Образование заострений a и b связано с тем, что $\mu \neq 0$, см. текст

При $y_{\Sigma} < y_{mush}$ решения с $\mu = 0$ и $\mu \ll 1$ отличаются мало. Следовательно теория с $\mu = 0$ описывает и случай $\mu \ll 1$. При $y_{\Sigma} > y_{mush}$ решение разбивается на две подобласти: впадины и струи. В интересующей нас (в связи с вопросом об сингулярности во впадине) подобласти впадины решения с $\mu = 0$ и $\mu \ll 1$

опять отличаются мало ⁷⁾ и развиваемая теория пригодна. Имеется хорошая сходимость теоретических результатов по N . Сравнение теории и численного эксперимента показывает, что вне подобласти гриба, то есть выше точки b на рис. 3, соответствующие формы η согласуются с высокой точностью.

Отделенность заострений друг от друга (сравните рис. 2 и 3) связана с тем, что $\mu \neq 0$. Поступление легкой жидкости внутрь растущих пузырьков сопровождается действием динамического давления $\rho_1 v^2$ со стороны быстро движущейся легкой жидкости. Это приводит к закручиванию концов заострений.

Автор выражает благодарность С.И.Анисимову за полезное обсуждение и А.В.Чехлову и А.Ю.Демьянову за помощь при численных расчетах. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-02-3630).

1. А.Б.Будько, А.Л.Великович, М.А.Либерман, Ф.С.Фелбер, ЖЭТФ 96, 140 (1989).
2. С.В.Базденков, О.П.Погоце, Письма в ЖЭТФ 57, 410 (1993).
3. S.W.Naam, Phys. Fluids B 3 (8), 2349 (1991).
4. В.Б.Розанов, И.Г.Лебо, С.Г.Зайцев и др., Препринт ФИАН, N 56, М., 1990.
5. E.A.Kuznetsov, M.D.Spector, and V.E.Zakharov, Phys. Lett. A 182, 387 (1993).
6. E.A.Kuznetsov, M.D.Spector, and V.E.Zakharov, Phys. Rev. E 49, 1283 (1994).
7. Л.Д.Ландау, Е.М.Лившиц, Гидродинамика, М., Наука, 1986.
8. D.H.Sharp, Physica 12 D, 3 (1984).
9. H.J.Kull, Phys. Rep. 206, 197 (1991).
10. D.Layzer, Astrophys. J. 122, 1 (1955).
11. H.J.Kull, Phys. Rev. Lett. 51, 1434 (1983).
12. N.A.Inogamov, and A.V.Chekhlov, Proc. of the 4th Internat. Workshop on the Phys. of Compressible Turbulent Mixing, Ed. by P.F.Linden, D.L.Youngs, and S.B.Dalziel. Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, (1993) p. 50.
13. О.М.Белоцерковский, Ю.М.Давыдов, Метод крупных частиц в газовой динамике, М.: Наука, 1982.
14. S.I.Anisimov, A.V.Chekhlov, A.Yu.Dem'yanov, and N.A.Inogamov, Russian J. Comp. Mech. 1, No.2, (1993).

⁷⁾Для описания же гриба решение, полученное при нулевой плотности второй жидкости, разумеется, не пригодно. Гриб описывается решением, следующим из теории периодических струй, см. последний раздел в [14].