Письма в ЖЭТФ, том 61, вып.5, стр.346 - 352 © 1995г. 10 марта

КВАНТОВЫЕ СТРУНЫ АБРИКОСОВА – НИЛЬСЕНА – ОЛЬСЕНА

Э.Т.Ахмедов[*1)], *М.А.Зубков*

Институт теоретической и экспериментальной физики
117259, Москва, Россия

[*] Московский физико-технический институт
г. Долгопрудный, Московская обл.

Поступила в редакцию 24 января 1994 г.

Рассмотрена квантовая теория струн в абелевой модели Хиггса. Показано, что в пределе бесконечно тонких струн полученная теория переходит в эффективную теорию рассмотренную Польчинским и Строминrером, в которой нет конформной аномалии. Полученная нами полная теория струн не имеет тахионов в спектре и поэтому реально существует в четырехмерном пространстве-времени.

1. Введение Одной из основных проблем современной квантовой теории поля является поиск верного вакуумного состояния. Обычно в феноменологическом подходе, для получения непертурбативных результатов, используется некий вакуум, состоящий из классических решений типа инстантонов.

Данная работа посвящена струнному вакууму. Мы рассмотрим в четырехмерном (4D) евклидовом пространстве абелеву модель Хиггса (АМХ) и последовательно, следя за мерой и квантовыми аномалиями, выделим из функционального интеграла часть, соответствующую топологическим дефектам (будет получена теория струн для случая, когда мировые поверхности имеют топологию сферы). Мы фактически делаем в непрерывном пределе то же, что было сделано на решетке для компактной КЭД в [1], и для АМХ в работе [2]: статсумма теории для компактных полей факторизовалась на две статсуммы: $Z_{com} = Z_{ncom}Z_{top}$, где Z_{ncom} – статсумма для некомпактных полей, а Z_{top} – статсумма для топологических дефектов. В случае компактной электродинамики топологические дефекты – это монополи, в случае АМХ – это струны Абрикосова – Нильсена – Олесена. В решеточной регуляризации нет расходимостей, а в непрерывном пределе АМХ (теория Гинзбурга – Ландау) может рассматриваться как эффективная теория для сверхпроводника второго рода вблизи критической точки, поэтому мы не обсуждаем проблему нуль-заряда и фактически имеем дело с реально существующими теориями.

В первых работах по струнам в АМХ в непрерывном пределе [3, 4] были исследованы в лондоновском пределе (бесконечно большая масса хиггсовского бозона) их квантовые свойства и показано, что в пределе сильной связи (тонкие, длинные струны), они описываются действием Намбу – Гото. Более точное действие для струн, следующее из АМХ, было полученно в работах [5, 6]. В работе [5] в лондоновском пределе вывод был проделан на классическом уровне в пределе достаточно большой массы фотона (достаточно тонкие струны). Оказалось, что для устойчивости классических струнных решений необходимо, чтобы в действии присутствовали члены зависящие от тензора внешней кривизны в степени больше чем два. А в работе [6] на уровне древесных диаграмм была найдена поправка к действию Намбу – Гото в разложении по

1) e-mail: ahmedov@vxitep.itep.ru

толщине струн и исследовался струнный Θ-член. Отметим также работу [7], в которой обсуждалось преобразование дуальности для АМХ.

Однако в упомянутых работах не рассматривались квантовые эффекты для струнной теории и, следовательно, были упущенны из виду такие важные моменты, как мера интегрирования и конформная аномалия (которая возникает в пределе бесконечно тонких струн, когда теория становится конформно инвариантной).

В то же время, в работе [8] была предложена эффективная квантовая теория для струн в АМХ. Авторы предложили конформную теорию адекватно описывающую бесконечно тонкие струны в АМХ: к действию Намбу–Гото из общих соображений был добавлен некий член с произвольным коэффицентом. Затем было найдено значение этого коэффицента, необходимое для сокращения конформной аномалии в 4D пространстве-времени. Мы покажем, что именно такая теория для бесконечно тонких струн естественным образом возникает, если учитывать якобиан при замене интегрирования по полевым переменным на интегрирование по струнным переменным. В следующем же порядке разложения по толщине струн (первая поправка) у нас, как и в [5, 6], возникает, с обратным знаком, член с жесткостью для струны, рассмотренный впервые в работах [9, 10].

2. От Абелевой модели Хиггса к квантовой теории струн. В функциональном интеграле для 4D АМХ,

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi \exp\left\{-\int d^4x \left[\beta F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}|D_\mu\Phi|^2 + \lambda(|\Phi|^2 - \Phi_0^2)^2\right]\right\},$$
$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu, \tag{1}$$

мера интегрирования по комплексному скалярному полю $\Phi = |\Phi| \exp(i\theta)$ равна

$$\int \mathcal{D}\Phi ... = \int \mathcal{D}Re\Phi \cdot \mathcal{D}Im\Phi ... = \int [|\Phi|\mathcal{D}|\Phi|]\mathcal{D}\theta ..., \tag{2}$$

в последнем интеграле интегрирование идет по всем функциям, регулярным везде кроме двумерных поверхностей, так как θ не определено там, где $\mathrm{Im}\Phi = \mathrm{Re}\Phi = 0$. Именно эти два условия в 4D приводят к двумерным замкнутым сингулярностям, которые являются мировыми поверхностями струн. Любую замкнутую сингулярность в $\theta = \tilde\theta + \theta^s$ можно представить в виде [5, 7]

$$\partial_{[\mu}\partial_{\nu]}\theta^s(x, \tilde x) = 2\pi\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\int_\Sigma d\sigma_{\alpha\beta}\delta^{(4)}[x - \tilde x(\sigma)],$$
$$d\sigma_{\alpha\beta} = \epsilon^{ab}\partial_a\tilde x_\alpha\partial_b\tilde x_\beta d^2\sigma = \sqrt{g}t_{\alpha\beta}d^2\sigma, \tag{3}$$

здесь $\theta^s(x, \tilde x)$ – функция от x и функционал от $\tilde x$, где $\tilde x = \tilde x(\sigma)$ – координаты двумерных сингулярностей, параметризуемых координатами σ_a, $a = 1, 2$; Σ - всевозможные положения сингулярностей (при этом мы ограничиваемся без потери общности единичным магнитным потоком внутри струн):

$$\int_\Sigma ... = \sum_{sing}\int_{sing} ..., \tag{4}$$

где "*sing*" задает положение одной сингулярности, $g = \det||g_{ab}||$, а $g_{ab} = \partial_a \tilde{x}_\mu \partial_b \tilde{x}_\mu$ и $t_{\mu\nu} = \frac{\epsilon_{ab}}{\sqrt{g}} \partial_a \tilde{x}_\mu \partial_b \tilde{x}_\nu$ – тензоры индуцированной метрики и внешней кривизны на Σ (мы не имеем внутренней метрики в теории), $t^2_{\mu\nu} = 2$ и $\partial_a = \partial/\partial\sigma_a$.

Для простоты мы рассмотрим лондоновский предел ($\lambda \to \infty$ и теория для радиальной части поля Φ тривиальна)[2]:

$$Z = \text{const} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\theta \exp\left\{ -\int d^4x \left[\beta F^2_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{2} |\partial_\mu \theta + A_\mu|^2 \right] \right\}, \tag{5}$$

где $\alpha = < |\Phi|^2 >$. Действуя последовательно требовалось бы регуляризовать эту теорию, например, путем явного введения регуляторов Паули–Вилларса. Однако оказывается, что для наших целей достаточна следующая регуляризация δ-функций:

$$\delta(x-y) = \lim_{M\to\infty} \frac{M}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \exp\{-M^2|x-y|^2\}, \tag{6}$$

здесь M – обрезание по импульсам. Такая регуляризация подразумевается для всех δ-функций, в частности для δ-функции, входящей в (3).

Теперь перейдем от вторично квантованной теории к интегрированию по струнным мировым поверхностям. Стандартная процедура замены переменных интегрирования включает в себя подстановку в функциональный интеграл единицы вида (см. (3))

$$1 = J[\theta^s(x,\tilde{x})] \int \mathcal{D}\tilde{x}_\mu \delta \left\{ \partial_{[\mu}\partial_{\nu]}\theta^s(x,\tilde{x}) - 2\pi\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} t_{\alpha\beta} \delta^{(4)}[x - \tilde{x}(\sigma)] \right\}. \tag{7}$$

Здесь $J[\theta^s(x,\tilde{x})]$ – якобиан перехода от полевых переменных к струнным переменным. Свертывая $\mathcal{D}\theta^s$ с функциональной δ-функцией, получаем:

$$\int \mathcal{D}\theta ... = \int \mathcal{D}\bar{\theta}\mathcal{D}\theta^s ... = \text{const} \int \mathcal{D}\bar{\theta}\mathcal{D}\tilde{x}_\mu \tilde{J}(\tilde{x}_\mu)..., \qquad \tilde{J}(\tilde{x}) = J[\theta^s(x,\tilde{x})], \tag{8}$$

где $\mathcal{D}\tilde{x}_\mu$ подразумевает под собой также и суммирование по топологиям мировых поверхностей струн.

Теперь выделим коллективные степени свободы из действия в формуле (5). Здесь действие квадратично по A_μ и, после фиксации калибровки $\partial_\mu \bar{\theta} = 0$ (где $\bar{\theta}$ – регулярная часть θ), элементарное интегрирование по A_μ дает

$$Z = \int \mathcal{D}\tilde{x}_\mu \tilde{J}(\tilde{x}) \times \tag{9}$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{\alpha\pi^2}{4} \int_\Sigma \int_{\Sigma'} d^2\sigma d^2\sigma' \sqrt{g(\sigma)} t_{\mu\nu}(\sigma) \mathcal{D}^{(4)}_m(\tilde{x} - \tilde{x}') \sqrt{g(\sigma')} t_{\mu\nu}(\sigma') \right\} Z_{pert}(\tilde{x}),$$

[2]При произвольном λ теория для радиальной части – $|\Phi|$ может быть факторизована [7], и все выкладки будут аналогичны проделанным при $\lambda \to \infty$, однако в окончательном выражении для статсуммы остается функциональный интеграл по $|\Phi|$.

где $m^2 = \alpha/\beta$ – масса калибровочного бозона, $(\Delta+m^2)\mathcal{D}_m^{(4)}(x) = \delta^{(4)}(x)$, а $Z_{pert}(\tilde{x})$ теория возмущений над рассматриваемым струнным вакуумом. Фиксируя репараметризацией конформную калибровку, мы нашли (смотри приложение) $\tilde{J}(\tilde{x}_\mu)$, когда Σ имеет топологию сферы:

$$\tilde{J}(\tilde{x}) = \mathrm{const}\exp\left\{\frac{22}{48\pi}\int_\Sigma d^2\sigma\left[\frac{1}{2}(\partial_a \log\sqrt{g})^2 + \mu\sqrt{g}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\ln M\bar{R}}{\pi}\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g}(\partial_a t_{\mu\nu})^2\right\}. \tag{10}$$

Коэффицент натяжения струны μ, возникающий благодаря существованию градиента поля Хиггса, определен в приложении; $\bar{R}$ – средняя кривизна струнных поверхностей. Полученное действие переходит, в пределе, когда m больше собственных значений второй фундаментальной формы внешней кривизны, в действие из работы [5]. Однако в [5] не учтен якобиан $\tilde{J}$. Это действие можно записать как разложение по величине $1/m\bar{R}$, или, что то же самое, по толщине струн. В первом порядке разложения по толщине действие локально и, в случае, когда Σ имеет топологию сферы, мы можем воспользоваться полученным выражением (10) для $\tilde{J}$, после чего имеем

$$S = \mu'\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g} - \beta'\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{g}(\partial_a t_{\mu\nu})^2 - \frac{11}{48\pi}\int_\Sigma d^2\sigma(\partial_a \log\sqrt{g})^2, \tag{11}$$

где $\mu' = 4\pi\alpha\ln(M^2/m^2) - \mu$, а $\beta' = \beta - \ln M\bar{R}/\pi$ – перенормированный за счет $\tilde{J}(\tilde{x})$ заряд теории. Следует заметить, что в теории нет внутренней метрики (g – это индуцированная метрика). Данное действие для струны с отрицательной жесткостью (см. [9, 10]) совпадает с точностью до $\ln\tilde{J}$ с действием полученным в [5, 6]. При этом член с жесткостью неявно учитывает конечную (хотя и маленькую) толщину струн.

Рассмотрим теперь нулевой порядок разложения по толщине струн, что соответствует $\beta' = 0$ (предел сильной связи). Если репараметризацией зафиксировать в (11) индуцированную метрику таким образом, что

$$\partial_a\tilde{x}_\mu\partial_b\tilde{x}_\mu = 0, \qquad a \neq b, \tag{12}$$

то мы получим конформную теорию с действием:

$$S = \mu'\int_\Sigma d^2\sigma(\partial_a\tilde{x}_\mu)^2 - \frac{11}{12\pi}\int_\Sigma d^2\sigma\frac{(\partial_a\partial_b\tilde{x}_\mu\partial_b\tilde{x}_\mu)^2}{(\partial_c\tilde{x}_\nu)^4}. \tag{13}$$

В статье [8] авторы добавили, с произвольным коэффицентом, второй член в формуле (13) к действию Намбу–Гото (первое слагаемое в (13)). Этот член естественным образом возникает как поправка к действию Намбу–Гото в разложении по обратной длине струн. Полученная теория может быть проквантована в гамильтоновом формализме [8]. На квантовом уровне возникает конформная аномалия. Для того чтобы эта аномалия сокращалась с учетом вклада репараметризационных духов в калибровке (12) в 4D пространстве времени необходимо [8], чтобы вышеуказанный произвольный коэффицент был равен как раз той величине, что и в (13).

Отметим также, что в действии, входящем в статсумму (9), присутствуют члены, зависящие от тензора внешней кривизны в степени больше чем два, что необходимо [5] для устойчивости классических струнных решений. Таким образом полученная теория струн (9) является реально существующей в 4D пространстве времени теорией, описывающей струны Абрикосова–Нильсена–Олесена в сверхпроводнике вторoго рода.

Один из авторов (А.Э.Т.) хотел бы поблагодарить за многочисленные дискусии Ф.В.Губарева, А.С.Лосева, А.Д.Миронова, М.Н.Чернодуба и особенно А.Ю.Морозова и М.И.Поликарпова за огромную помощь при работе над задачей и статьей. Работа частично финансировалась по гранту 93-02-03609 Российского фонда фундаментальных исследований. Я так же благодарен Японской Ассоциации поддержки науки (JSPS) за финансовую помощь, полученную в рамках программы поддержки ученых бывшего СССР.

3. Приложение. В настоящем приложении приведены детали вычисления якобиана $\tilde{J}$. Его определение, следующее из (7) и (8), есть:

$$\left[\tilde{J}(\tilde{x})\right]^{-1} = \int \mathcal{D}\tilde{y}_\mu \delta\left\{\partial_{[\mu}\partial_{\nu]}\theta^s(x,\tilde{y}) - \partial_{[\mu}\partial_{\nu]}\theta^s(x,\tilde{x})\right\}, \tag{14}$$

где $\partial_{[\mu}\partial_{\nu]}\theta^s(x,\tilde{x})$ и $\partial_{[\mu}\partial_{\nu]}\theta^s(x,\tilde{y})$ определены формулой (3). Используем для x_μ следующее разложение:[3]

$$x_\mu = x_\mu(s) + n^k_\mu(s)\Omega^k, \tag{15}$$

где $x_\mu(s)$ лежит на поверхности Σ, n^k_μ – два вектора, ортогональных к Σ в точке s , а Ω^k – координаты вдоль этих векторов. Тогда

$$\delta^{(4)}[x - \tilde{x}(\sigma)] = \frac{\delta^{(2)}(s-\sigma)}{\sqrt{g}}\delta^{(2)}[\Omega^k]. \tag{16}$$

Представим функциональную δ-функцию в (14) в виде

$$\delta\{...\} = \prod_x \delta_x\{...\} = \prod_{\Omega^k \neq 0} \delta_x\{0\} \prod_{\Omega^k = 0} \delta_x\{...\}, \tag{17}$$

здесь использовалось то, что в случае $\Omega^k \neq 0$ выражение (16) (а следовательно и выражение внутри функциональной δ-функции (14)) равно 0. Теперь, регуляризуя как и в (6) функциональную δ-функцию, получаем:

$$\begin{aligned}\delta\{...\} &= \mathrm{const}(M^2)^{\mathrm{const}\cdot M^4[V - \frac{1}{M^2}S(\Sigma)]} \prod_{\Omega^k=0} \delta_x\{...\} = \\ &= \mathrm{const}\exp\{-\mu S(\Sigma)\} \prod_{\Omega^k=0} \delta_x\{...\}, \qquad \mu = \mathrm{const} M^2 \ln M\bar{R},\end{aligned} \tag{18}$$

где V – объем всего пространства; область, где $\Omega^k = 0$, занимает часть пространства, по "объему" равную

[3] Обсуждение однозначности этого разложения проводилось в [4, 5].

$$S(\Sigma)=\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{h(\sigma)}\tau_{\mu\nu}(\sigma)\int_\Sigma d^2\sigma'\sqrt{h(\sigma')}\tau_{\mu\nu}(\sigma')\prod_{i=1}^{2}\frac{M}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\exp\{-M^2|\sigma_i-\sigma_i'|^2\}$$

$$\lim_{M\to\infty}S(\Sigma)=\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{h}. \tag{19}$$

$S(\Sigma)$ – это регуляризованная площадь всех струнных мировых поверхностей из Σ (4) (см. [11]). Полученный здесь расходящийся коэффицент при действии Намбу–Гото – это плата за рассмотрение лондоновского предела. Фактически вместо M в (18) можно подставить физическую массу Хиггса, как указано в работе [5]. Подставляя разложение (16) для $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ в (3), а (3)-в функциональную δ-функцию (14), получаем из (18)

$$\delta\{...\}=\text{const}\delta[g-h]\delta[t_{\mu\nu}-\tau_{\mu\nu}]\exp\{-\mu S(\Sigma)\}. \tag{20}$$

Теперь подставим в (14) единицу в виде

$$1=\int\mathcal{D}h_{ab}\delta\left(h_{ab}-\partial_a\tilde{y}_\mu\partial_b\tilde{y}_\mu\right)\mathcal{D}\tau_{\mu\nu}\delta\left(\tau_{\mu\nu}-\frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{h}}\partial_a\tilde{y}_\mu\partial_b\tilde{y}_\nu\right) \tag{21}$$

и проделаем следующую замену:

$$\int\mathcal{D}h_{ab}\delta(h_{ab}-\partial_a\tilde{y}_\mu\partial_b\tilde{y}_\mu)\mathcal{D}\tau_{\mu\nu}\delta\left(\tau_{\mu\nu}-\frac{\epsilon_{ab}}{\sqrt{h}}\partial_a\tilde{y}_\mu\partial_b\tilde{y}_\nu\right)\exp\{-\mu\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{h}\}...=$$
$$=\text{const}\int\mathcal{D}h_{ab}\mathcal{D}\tau_{\mu\nu}\exp\left\{-\frac{\mu}{2}\int_\Sigma d^2\tau\sqrt{h}\tau_{\mu\nu}^2-\mu\int_\Sigma d^2\tau\sqrt{h}h^{ab}\partial_a\tilde{y}_\mu\partial_b\tilde{y}_\mu-\right.$$
$$\left.-\mu\int_\Sigma d^2\tau\tau_{\mu\nu}\epsilon_{ab}\partial_a\tilde{y}_\mu\partial_b\tilde{y}_\nu\right\}..., \tag{22}$$

здесь поля h_{ab} и $\tau_{\mu\nu}$ не имеют кинетических членов и, следовательно, принимают свои классические значения (смотри подробнее главу 9 из книги [12]). В случае когда Σ имеет топологию сферы, фиксируем конформную калибровку [4] и интегрируем по $\tilde{y}_\mu$. Первые два члена в экспоненте (22) и репараметризационные духи дадут стандартный вклад в форме действия Лиувилля с центральным зарядом, равным $(26-D)=22$ (смотри [12]). А третий член приводит к слагаемому

$$\frac{\ln M\bar{R}}{\pi}\int_\Sigma d^2\tau\sqrt{h}(\partial_a\tau_{\mu\nu})^2$$

в якобиане. Таким образом, интегрирование по h_{ab} и $\tau_{\mu\nu}$ приводит к выражению (10).

[4] Изложенный в приложении способ вычисления, хотя и самый простой, не позволяет вычислить якобиан при фиксации другой, не конформной, калибровки. Более последовательно следовало бы найти этот якобиан, следя за нулевыми модами детерминантов для калибровочных полей (абсолютно аналогично нахождению инстантонной меры). В таком случае можно было бы ввести внутренюю метрику в теорию. С внутренней метрикой теория для бесконечно тонких струн была бы аналогична рассмотренной в работах [13, 14]. Отличие заключается только в том, что индуцированное поле Лиувилля в нашем случае несет центральный заряд 23, а не 1, как в [13, 14].

1. T.Banks, R.Myerson, and J.Kogut, Nucl. Phys. **B129**, 493 (1977).
2. M.I.Polikarpov, U.-J.Wiese, and M.A.Zubkov, Phys. Lett. **B309**, 133 (1993).
3. D. Forster, Nucl. Phys. **B81**, 84 (1974).
4. J.L.Gervais and B.Sakita, Nucl. Phys. **B91**, 301 (1975).
5. P.Orland, Nucl. Phys. **B428**, 221 (1994).
6. Masatoshi Sato and Shigeaki Yahikozawa, Preprint KUNS-1269, June 94, hep-th/9406208.
7. Kimyeong Lee, Phys. Rev. **D48**, 2493 (1993).
8. J.Polchinski and A.Strominger, Phys. Rev. Lett. **67**, 1681 (1991).
9. A.Polyakov, Nucl. Phys. **B268**, 406 (1986).
10. H.Kleinert, Phys. Lett. B **174**, 335 (1986).
11. Yu.M.Makeenko and A.A.Migdal, Nucl. Phys. **B188**, 269 (1981).
12. A.Polyakov, Harwood academic publishers 1987, "Gauge fields and strings".
13. F.David, Mod. Phys. Lett. **A3**, 1651 (1988).
14. J.Distler and H.Kawai, Nucl. Phys. **B312**, 509 (1989).