Письма в ЖЭТФ, том 19, вып. 4, стр 193 – 197 *20 февраля 1974 г.*

МАГНИТНАЯ ЛОВУШКА ДЛЯ БЕСТОКОВОЙ ПЛАЗМЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ МАГНИТНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ – СТЕЛЛАТРОН ("ПЕРСТЕНЬКОВЫЙ СТЕЛЛАРАТОР")

И.С.Данилкин, Л.М.Коврижных

Предлагается стеллараторная ловушка с эллиптическими магнитными поверхностями, с полуосями a, b, обладающая коэффициентами переноса в $(b/a)^2$ меньшими, чем в ловушках с круглым сечением. При эквивалентных объемах плазмы это позволяет в (b/a) раз увеличить время удержания, снизив тем самым соответствующие суммарные энергетические пороги зажигания и энерговыделения при термоядерной реакции. Оценки коэффициентов переноса проведены в рамках так называемой "неоклассической" модели столкновительной диффузии.

Известно, что условие гидродинамической устойчивости в токамаках $q > 1$ (q – запас устойчивости) определяет максимальное значение плотности тока в плазме и, таким образом, ставит определенную границу для омического метода нагрева. Для повышения предельного значения тока был предложен "перстеньковый токамак" – токамак с эллиптическим сечением магнитных поверхностей, вытянутым вдоль главной оси тора [1].

В настоящей статье мы хотим обратить внимание на возможность создания ловушки стеллараторного типа с сильно вытянутыми вдоль главной оси тора сечениями магнитных поверхностей, которую мы будем называть стеллатроном. Поскольку в таких ловушках магнитные поверхности и вращательное преобразование создаются не током, текущим по плазме, а внешними проводниками, то можно ожидать, что в подобных системах отношение полуосей b/a можно, в принципе, получить как угодно большим. Как мы увидим, это позволяет в рамках того же подхода, как и в случае перстенькового токамака, существенно уменьшить влияние тороидальных эффектов на коэффициенты переноса.

Рассмотрим в качестве примера систему с магнитным полем $\mathbf{B} = \nabla\phi$, описываемым скалярным потенциалом

$$\Phi(u,v,s) = s + \epsilon c [Se_n(u, -q) s e_n(v, -q) \cos nas - Ce_n(u,-q) c e_n (v, -q) \times \\ \times \sin n a s] \qquad (1)$$

внутри эллиптического цилинда $u < u_0$, где u, v – эллиптические координаты в сечении $s = \text{const}$, s – продольная координата вдоль оси цилиндра [2]. Потенциал (1) соответствует низшей гармонике системы проводников со знакочередующимся током, уложенных по спиралям

$$\frac{1}{n} \int_0^v (a_n + 2q \cos 2\xi)^{1/2} d\xi - a s \cong \text{const} \qquad (2)$$

на эллиптическом цилиндре $u = u_0$ (или эллиптическом торе в приближении $a/R << 1$, где R – главный радиус тора). Входящие в (1) функции $Se_n(u, -q)$ $Ce_n(u, -q)$, $se_n(v, -q)$, $ce_n(v,-q)$ – присоединенные и обычные функции Матье целого порядка n от параметра $q = n^2 a^2 c^2/4$ в обозначениях Мак-Лахлана [3]. По условию рассмотрения задачи (малость быстрых осцилляций силовых линий относительно усредненных магнитных поверхностей) наиболее интересным оказывается случай, когда $a_n \sim n^2 >> 2q >> 1$, причем $n > b_0/a_0 = 1/\text{sh}\, u_0 >> 1$.

Уравнения для магнитных силовых линий поля, описываемого потенциалом (1) можно решить, используя метод усреднения [4]. Уравнения для усредненных по продольному токовому периоду $L = 2\pi/na \lesssim a_0$ координат силовых линий $\bar{u}$, $\bar{v}$ имеют интеграл

$$\bar{\psi}(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{f} \exp[- (\text{ch}^2 \bar{u} - \cos^2 \bar{v})] = \text{const} , \qquad (3)$$

отвечающий усредненным магнитным поверхностям $\bar{\psi}$. Входящая в выражение (3) функция $\bar{f} = f(\bar{u}, \bar{v})$ есть

$$f = Se_n(\bar{u}) Ce'_n(\bar{u}) s e'_n(\bar{v}) c e_n(\bar{v}) - Se'_n(\bar{u}) Ce_n(\bar{u}) c e'_n(\bar{v}) s e_n(\bar{v}) , \qquad (3а)$$

где штрихи означают производную по аргументу и опущена зависимость от параметра "$-q$". Структура магнитных поверхностей $\bar{\psi} = \text{const}$ вместе со схемой токовой системы, создающей магнитное поле, и система координат приведены на рис. *а*, *б*. Качественно правильное описание возникающей структуры поверхностей $\bar{\psi}(\bar{u}, \bar{v}) = \text{const}$ можно получить уже в крайнем асимптотическом пределе $n >> 1$, когда $\bar{f}(\bar{u}, \bar{v}) \to (\text{ch}^2 n\bar{u} - \cos^2 n\bar{v})$, а линии тока образуют спирали $v - as = \text{const}$.

Полученные результаты показывают принципиальную возможность создания ловушки с сильно вытянутыми по вертикали магнитными поверхностями, обладающими, в среднем, эллиптическим сечением. Кроме того, как неизбежный результат такой деформации, возникает также одномерная резонансно-волокнистая структура вблизи $u = 0$. Однако размеры этой подструктуры конечны и, согласно выражению (3), составляют по u величину

$$u \lesssim u_{\text{рез}} \approx \frac{\operatorname{ar\,sh} 1}{(a_n + 2q)^{1/2}} \sim \frac{1}{n}, \tag{4}$$

что при $n > b_0 / a_0 = 1/\operatorname{sh} u_0$ не представит каких-либо серьезных дефектов магнитной структуры. Горизонтальный апертурный размер по u, согласно (5), может составить величину порядка u_0, если

$$\epsilon < \epsilon_0 \approx \frac{2ac}{n} e^{-nu_0} \tag{5}$$

Оценки при надлежащем ограничении u (когда $nu \sim 1$), дают приемлемые величины угла вращательного преобразования ι и шира, а исследование вопросов оптимизации токовой системы выходит за рамки данной статьи. Более подробному изложению данного вопроса будет посвящена другая статья, где будут приведены и иные способы реализации ловушки типа стеллатрона.

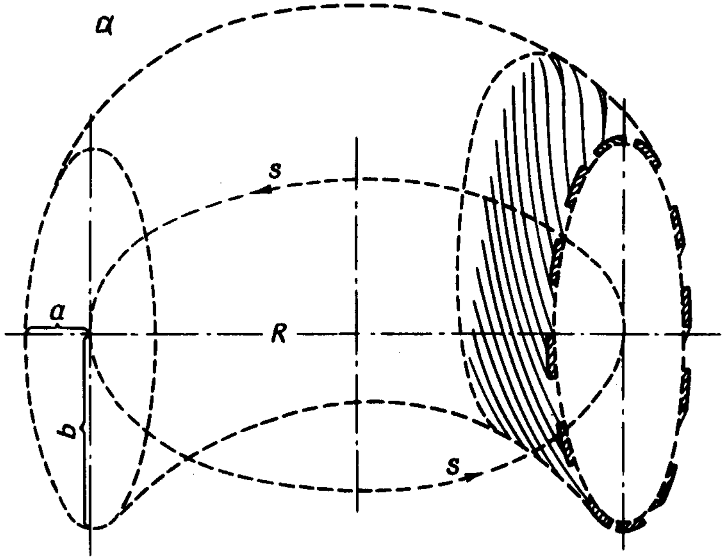
Оценим теперь величину коэффициента диффузии D в стеллатроне. Это нетрудно сделать, используя модель броуновского движения пробной частицы [5], в соответствии с которой $D \approx < \Delta^2 > \nu$, где ν – эффективная частота соударений, а Δ – случайное отклонение частицы от магнитной поверхности за время между двумя последовательными соударениями. Опуская несложные вычисления, приведем выражение для коэффициента диффузии $D_{\text{т}}$, связанного с наличием тороидальности[1]

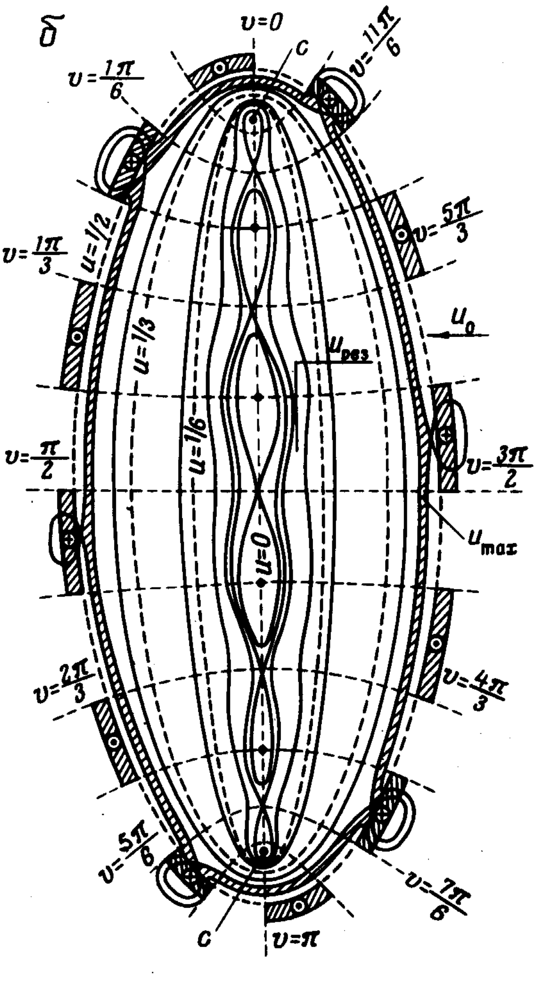
$$D_{\text{т}} \approx u^2 x \begin{cases} \dfrac{1}{\iota} \rho^2 \nu, & \text{при } \dfrac{\iota v_{\text{т}}}{R} < \nu \\[2ex] \dfrac{v_{\text{т}} \iota}{R} \dfrac{\rho^2}{\iota^2}, & \text{при } \epsilon_{\perp}^{3/2} \dfrac{\iota v_{\text{т}}}{R} < \nu < \dfrac{\iota v_{\text{т}}}{R}, \\[2ex] \rho^2 \nu \dfrac{\epsilon_{\perp}^{3/2}}{\nu^2} \dfrac{v_{\text{т}}}{R^2} & \text{при } \epsilon_{\perp} \epsilon_{\perp}' \dfrac{\rho v_{\text{т}}}{b} < \nu < \epsilon^{3/2} \dfrac{\iota v_{\text{т}}}{R} \end{cases} \tag{6}$$

где ν – эффективная частота электрон-ионных соударений, $\iota = \iota_{\nu}/2\pi$ – нормированный на 2π полный угол вращательного преобразования, $v_{\text{т}}$ – тепловая скорость электронов, ρ – ларморовский радиус, $\epsilon_{\perp}$ – отношение мультипольной "винтовой" компоненты поля к продольной компоненте B_s (т.е. $\epsilon_{\perp} \sim \epsilon n e^{nu}$), R – главный радиус тора, $u = a/b$, а $\epsilon_{\perp}'$ – производная $\epsilon_{\perp}$ вдоль нормали к магнитной поверхности.

---

[1] Полный коэффициент диффузии $D = D_{\text{кл}} + D_{\text{т}}$, где $D_{\text{кл}} = \rho^2 \nu$.


а
s
a
R
b
s


б
v=0
c
v=11π/6
v=1π/6
v=5π/3
v=1π/3
u=1/2
u=1/3
u_0
u_рез
u=1/6
v=π/2
v=3π/2
u=0
u_max
v=2π/3
v=4π/3
v=5π/6
v=7π/6
c
v=π

Из выражения (6) следует, что во всей области частот коэффициент диффузии (а также, как нетрудно показать, и коэффициент теплопроводности) для стеллатрона в $(b/a)^2$ раз меньше, чем для обычного стелларатора при равном угле вращательного преобразования. В соответствии с этим, время жизни плазмы в стеллатроне в (b/a) раз больше, чем в обычном стеллараторе.

Таким образом, в случае справедливости теоретического прогноза, основанного на существующих представлениях о явлениях переноса в тороидальных системах, суммарный энергетический порог зажигания (и, соответственно, энерговыделения) термоядерной реакции в стеллатроне грубо на один порядок (в b/a раз) меньше, чем в обычных системах. В рамках же чисто физических исследований сооружение стеллатрона позволило бы в значительной мере прояснить роль тороидальных эффектов в удержании плазмы. Конечно, прежде необходимо достаточно детально исследовать вопросы устойчивости плазмы в подобных устройствах, равно как и вопросы достаточной топологической устойчивости магнитной конфигурации.

В заключение, авторы считают необходимым выразить свою благодарность за многочисленные обсуждения и полезные дискуссии доктору физико-математических наук И.С.Шпигелю и кандидату физико-математических наук М.А.Ивановскому.

Физический институт
им. П.Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
13 декабря 1973 г.

Литература

[1] Л.А.Арцимович, В.Д.Шафранов. Письма в ЖЭТФ, 15, 72, 1971.

[2] Дж. А.Стрэттон. "Теория электромагнетизма", ОГИЗ–Гостехизд. ГИТТЛ, М.–Л., 1948.

[3] Н.В.Мак-Лахлан. "Теория и приложение функций Матье". М., ИИЛ, 1953.

[4] Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. "Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний", М., ГИТТЛ, 1955.

[5] Л.М.Коврижных. "Transport processes in toroidal magntic traps", Internal report IC/70/86, Trieste, 1970.