Письма в ЖЭТФ, том 20, вып. 3, стр. 174 – 176 5 августа 1974 г.

РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ПОТЕРЯ СИММЕТРИИ ПРИ ИЗЭНТРОПИЧЕСКОМ СЖАТИИ СФЕРИЧЕСКОЙ КАПЛИ

С.И.Анисимов, Н.А.Иногамов

Рассмотрена динамика изэнтропического сжатия капли с неоднородным начальным распределением плотности под действием внешнего давления, постоянного по поверхности капли. Показано, что сферическая форма капли неустойчива и в процессе сжатия происходит потеря сферической симметрии.

В связи с проблемой лазерного термоядерного синтеза многими авторами производились расчеты сжатия и нагревания сферических мишеней, симметрично облучаемых лазерными импульсами специально программированной формы. Для изучения динамики сжатия и выбора оптимальной формы лазерного импульса применялись как численные методы [1 – 4], так и аналитический подход, основанный на частных решениях уравнений газодинамики [4 – 6]. В обоих случаях были с достаточной полнотой исследованы лишь движения, обладающие сферической симметрией. Простые качественные соображения указывают на то, что такие движения неустойчивы; однако, систематическое исследование динамики лазерного сжатия с учетом неустойчивостей, нарушающих сферическую симметрию, до сих пор не проводилось.

В настоящей работе исследовано нелинейное развитие возмущений при сжатии капли под действием приложенного к ее поверхности внешнего давления, т. е. внешняя "корона" не рассматривается, а заменена полем давления. Неустойчивости короны могут только ухудшить дело. Такой процесс сжатия является разумной моделью для описания поведения плотного ядра лазерной мишени в процессе облучения. Сферически симметричный вариант этой модели рассматривался в связи с задачами лазерного термоядерного синтеза в работах [4, 5]. Мы рассмотрим более общий случай капель, имеющих форму эллипсоида, и воспользуемся результатами работы [7], где решена задача о расширении в вакуум газового облака, не обладающего сферической симметрией. Интересующее нас движение можно получить в результате обращения во времени течения, рассмотренного в [7]. Такое обращенное во времени течение оказывается неустойчивым, и предельная форма капли тем более отличается от сферической, чем выше степень сжатия. Полученное ниже решение – точное. Оно не предполагает ни медленности процесса, ни постоянства давления в капле.

Переходя к построению решения, рассмотрим класс движений сжимаемой среды, описываемых аффинным преобразованием координат $r_i = F_{ik}(t)a_k$ (r_i – эйлеровы, a_k – лагранжевы координаты жидкой частицы; $i, k = 1, 2, 3$). К этому классу относятся деформации и вращения произвольного трехосного эллипсоида [8, 9]. Рассмотренные в [4, 5] движения также относятся к этому классу и сводятся к простому преобразованию масштаба $r = aF$. Чтобы показать неустойчивость таких симметричных движений, достаточно рассмотреть чистую деформацию в отсутствие вращения. В этом случае матрица преобразования диагональна, $F_{ik} = R_i\,\delta_{ik}$. Система уравнений газодинамики для таких течений может быть приведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент вектора $R_i\,(t)$

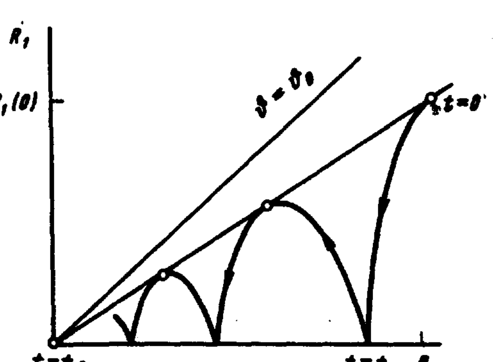
$$\ddot{R}_i + \frac{\partial U}{\partial R_i} = 0; \quad U = -c\,(R_1 R_2 R_3)^{-2/3}; \quad c > 0 \tag{1}$$

(при выводе (1) предполагалось, что сжимаемое вещество имеет степенную адиабату с показателем $\gamma = 5/3$).

В классической механике система уравнений (1) описывает падение частицы на центр в несимметричном потенциальном поле. Анализ решений системы (1) облегчается, если использовать интеграл энергии и найденный в работе [7] дополнительный интеграл

$$R_i\,R_i = 2Et^2 + At + B.$$

(A, B, E – постоянные интегрирования). Исследование показывает, что наиболее быстрое сжатие происходит вдоль оси, которой соответствует наименьший начальный радиус $R_i\,(0)$ (будем обозначать эту ось индексом 1). За конечное время t_1 происходит полное "схлопывание" эллипсоида, т. е. $R_1(t_1)$ обращается в нуль при конечных R_2 и R_3. Компонента скорости вдоль оси 1 неограниченно возрастает при $t \to t_1$. Формально решение можно продолжить за точку схлопывания, если рассмотреть отражение от плоскости $R_1 = 0$. На рисунке показано решение



задачи в случае сжатия сфероида $\left(R_2 = R_3,\ \theta = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{R_1}{R_2\sqrt{2}}\right)$. Значение $\theta_0 = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ соответствует сферически симметричному сжатию. Пусть начальное отклонение формы капли от сферической мало, $|\theta(0)-\theta_0|= \Delta_0 << 1$. Простое вычисление показывает, что при сжатии отклонение от сферичности растет по закону

$$\Delta = \Delta_0\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^{-a}, \qquad (2)$$

где t_0 – положительный корень выражения $2Et^2 + At + B$ и $a = 1/\sqrt{2}$. Вводя среднюю степень сжатия n, равную отношению начального объема капли к конечному, можно переписать (2) в виде

$$\Delta = \Delta_0 n^{\beta}; \quad \beta = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}5 .$$

Таким образом, в результате изэнтропического сжатия нарушения сферической формы возрастают в $\sqrt{n}$ раз.

Заметим, что полученное решение, по существу, соответствует нелинейной стадии развития тейлоровской неустойчивости в сжимаемой среде при частного вида начальном возмущении с длиной волны порядка радиуса сжимаемой капли. Понятно, что амплитуда такого возмущения должна существенно возрастать за время порядка полного времени сжатия t_0. Для возмущений с меньшей длиной волны время нарастания уменьшается пропорционально $\sqrt{\lambda}$. Естественно ожидать, однако, что наиболее быстрорастущие коротковолновые возмущения в рассматриваемой ситуации будут подавлены вследствие размытия границы между плотным ядром и короной, так что действительный характер нарушения сферической симметрии при сжатии будет в общих чертах соответствовать рассмотренной модели.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
17 июня 1974 г.

Литература

[1] J.Nuckolls, L.Wood, A.Thiessen, G.Zimmerman. Preprint UCRL-74116, 1972.

[2] J.W.Shearer, J.J.Duderstadt. Nucl. Fusion, 13, 401, 1973.

[3] J.S.Clarke, H.N.Fischer, R.J.Mason. Phys. Rev., Lett., 30, 89, 1973.

[4] R.E.Kidder. Nucl. Fusion, 14, 53, 1974.

[5] Н.В.Змитренко, С.П.Курдюмов. Препринт ИПМ АН СССР №16, 1973.

[6] R.Kidder. Preprint UCRL-74040, 1972.

[7] С.И.Анисимов, Ю.И.Лысиков. Прикл. мат. и мех., 34, 926, 1970.

[8] Л.В.Овсянников. ДАН СССР, 111, 47, 1957.

[9] J.F.Dyson. Journ. Math. Mech., 18, 81, 1968.