Письма в ЖЭТФ, том 20, вып. 6, стр. 430 – 433 20 сентября 1974 г.

СПЕКТР ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А.М.Поляков

В этой статье мы хотели бы привлечь внимание к до сих пор не исследованной части спектра обычных гамильтонианов, используемых в квантовой теории поля. В качестве первого примера рассмотрим модель самовзаимодействующего скалярного поля в двумерном пространстве – времени с гамильтонианом:

$$H = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \pi^2 + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 - \mu^2\phi^2 + \lambda/2\,\phi^4 \right\} \tag{1}$$

$$\pi(x) = -i\,\delta/\delta\phi(x) \ .$$

В этой модели вакуум заполнен бозе-конденсатом $\bar{\phi}^2 = \mu^2/\lambda$ Над вакуумом находится одночастичное состояние с массой $\sqrt{2}\mu$, представляющей собой малые колебания постоянного конденсата. Однако $\bar{\phi} =$ = const не есть единственное устойчивое равновесное состояние. Имеется другая экстремаль потенциальной энергии в (1), определяемая из уравнения

$$\phi_c'' + \mu^2\phi_c - \lambda\phi_c^3 = 0 \tag{2}$$

с граничными условиями $\phi_c^2(\pm\infty) = \mu^2/\lambda$, которые означают, что вакуум возмущен лишь внутри конечного обьема. Решение уравнения (2) имеет вид

$$\phi_c(x) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\,\mathrm{th}\,\frac{\mu x}{\sqrt{2}} \ . \tag{3}$$

Для вычисления спектра колебательных уровней энергии вблизи рассматриваемой точки равновесия запишем

$$\phi(x) = \phi_c(x) + \phi(x)$$

и пренебрежем членами ϕ^3 и ϕ^4 в гамильтониане (последнее законно при $\lambda << \mu^2$). Диагонализуя получившийся квадратичный гамильтониан находим спектр масс

$$M_n = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\mu^3}{\lambda} + \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2}}\mu + \frac{\mu}{\sqrt{2}}\sqrt{n(4-n)} \tag{4}$$

$$n = 0,\ 1,\ 2\ .$$

В формуле (4) первый член есть потенциальная энергия в точке равновесия, второй – энергия нулевых колебаний и третий – энергия возбуждения. Итак, в данной модели есть три типа частиц с аномально большими массами. Мы будем называть такие объекты экстремонами.

Полученный результат в обобщенной формулировке состоит в том, что каждому стационарному регулярному решению классических уравнений движения в квантовой теории поля со слабой связью соответствует свой набор экстремонов, массы которых можно в принципе вычислить. Покажем, что экстремоны существуют в трехмерных моделях. Рассмотрим теорию изовекторного поля Хиггса $\phi_a(x)$, $a = 1, 2, 3$.

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2}\pi_a^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi_a)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi_a^2 + \frac{\lambda}{4}(\phi_a^2)^2 \right\} d^3x . \qquad (5)$$

Уравнение для экстремали

$$\nabla^2\phi_a + \mu^2\phi_a - \lambda \sum_b \phi_b^2 \quad \phi_a = 0$$

имеет решение

$$\phi_a = x_a u(r) r^{-1} ,$$

где u подчинено уравнению

$$u'' + \frac{2}{r} u' + \left(\mu^2 - \frac{2}{r^2}\right) u - \lambda u^3 = 0$$

$$u(\infty) = \mu/\sqrt{\lambda} ; \qquad u(r) = \text{const } r .$$

Это решение будем называть "ежом", поскольку изовектор в данной точке пространства направлен вдоль радиус-вектора. Уединенный еж не является экстремоном, так как его энергия линейно расходится на больших расстояниях из-за неоднородности распределения направлений поля ϕ_a. Для преодоления этой трудности имеются две возможности. Первая состоит в подключении к ежу поля Янга – Миллса, то есть в замене

$$\nabla_\mu \phi_a \to \nabla_\mu \phi_a + g\epsilon_{abc} A_\mu^b \phi_c$$

и добавлении к (5) гамильтониана Янга – Миллса. При этом в силу калибровочной симметрии второго рода неоднородность направлений становится физически несущественной и не дает вклада в энергию, которая поэтому оказывается конечной. Решение классических уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} &\phi_a(x) = x_a u(r) r^{-1}, \\ &A_\mu^a(x) = \epsilon_{\mu a b}\, x_b \left(a(r) - \frac{1}{gr^2}\right), \end{aligned} \qquad (6)$$

где u и a подчинены уравнениям

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{2}{r} u' + (\mu^2 - 2g^2 a^2(r))\, u - \lambda u^3 = 0 \\ a'' + \dfrac{4}{r} a' - \dfrac{3}{r^2} a - g^2 r^2 a^3 - g^2 u^2 a = 0 \end{cases} .$$

Масса возникающего экстремона имеет порядок

$$M \sim \frac{\mu^2}{\lambda} m_V^{-1} \sim m_V / g^2$$

(где $m_V = g^2 u^2(\infty)$ – масса векторных бозонов).

В рассмотренной модели, как известно, имеется один безмассовый вектон и два массивных вектона. Если первый из них отождествить с фотоном, то еж в силу (6) обладает магнитным зарядом[1].

√ Легко построить ежи, в которых все компоненты калибровочного поля массивны и сосредоточены внутри области $1/m_V$. Для этого достаточно рассмотреть изотензорное или изоспинорное поле Хиггса. В первом случае решение следует искать в виде $\phi_{ab} = r^{-2}(x_a x_b - \frac{1}{3}\delta_{ab} r^2) u(r)$

во втором оно имеет более сложный вид и будет описано в другом месте.

Другая возможность для конструирования экстремона состоит в образовании пары еж – антиеж. Легко показать, что энергия пары $E = AR$, где R – расстояние между компонентами пары. Для стабилизации этого состояния необходимо рассматривать уровни с нулевым моментом L

$$E_{eff} = AR + B\frac{L^2}{R^2} . \tag{7}$$

Спектр масс имеет вид

$$M^2(L) = \mathrm{const}\ L^{4/3} . \tag{8}$$

Строгое обоснование формулы (7) требует решения уравнения для экстремали с учетом фиксированности углового момента. Такое уравнение было выведено нами, но найти его точное решение не удалось. Поэтому справедливость (8) зависит от гипотезы о характере вращения ежей. В частности, если предположить, что во вращении участвует область пространства, заключенная между ежами, вместо (8) получится формула

$$M^2(L) = \mathrm{const}\ L .$$

Бузусловно, однако, что формула для энергии типа (8) должна привести к растущим траекториям Редже.

Итак, при интерпретации спектра элементарных частиц на основе теории поля следует помнить о многих новых возможностях, возникающих при учете экстремонных состояний.

Идеи весьма близкие к изложенным выше развивались в работах [1 – 4], но мне представляется, что как метод рассмотрения, так и полученные выше результаты являются в какой-то мере новыми.

Я благодарен В.Л.Березинскому, Л.Б.Окуню и Л.Д.Фаддееву за плодотворные обсуждения.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау

Поступила в редакцию
5 июля 1974 г.

---

[1] На это обстоятельство автору указал Л.Б.Окунь. После окончания работы был получен препринт Хоофта, где содержится аналогичный результат.

Литература

[1] H. Nielsen, P. Olesen. Nucl. Phys., B61, 45, 1973.

[2] Я.Б.Зельдович, И.Ю.Кобзарев, Л.Б.Окунь. Препринт ИПМ, 1974.

[3] T.D. Lee, G.C. Wick. Columbia University Preprint, COO-2271-20 1974.

[4] Л.Д.Фаддеев. Phys. Lett., в печати.