

РАССЕЯНИЕ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ С ЛАГРАНЖИАНОМ $L = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu u)^2 + m^2 (\cos u - 1) \right]$.

И.Я.Арефьева, В.Е.Корепин

Показано, что основные свойства рассеяния классических решений уравнения $\square u + m^2 \sin u = 0$ сохраняются и в квантовом случае.

За последнее время построены решения целого ряда классических нелинейных уравнений движения в двумерном пространстве - времени [1]. В частности, описаны решения модели с действием [2]:

$$A = \frac{1}{\gamma_0} \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu u)^2 + m_0^2 (\cos u - 1) \right]. \quad (1)$$

Классическая S -матрица для этой модели обладает следующими свойствами: 1) отсутствует множественное рождение; 2) импульсы конечных и начальных частиц равны; 3) фаза n -частичной S -матрицы равна сумме фаз попарных столкновений (факторизация).

В этой статье мы показываем, что для квантовой модели с действием (1) свойства 1 и 2 сохраняются. Есть основания предполагать, что сохраняется и свойство 3; здесь приведены аргументы во втором порядке теории возмущений (ТВ). Квантование проводим стандартным образом и S -матрицу вычисляем по фейнмановским правилам для амплитуды $F_{n,m}$, где n - число входящих, m - выходящих частиц соответственно. ТВ проводим по параметру γ ; амплитуду в порядке l обозначаем через $F_{n,m}^{(l)}$, а ее связную часть через $\mathcal{F}_{n,m}^{(l)} \equiv \mathcal{F}_{n+m}^{(l)}$. На графиках рисуем амплитуду без учета внешних линий. Поясним вопросы, связанные с перенормировкой. Единственной расходящейся величиной является $D(0) = \int d^2k \frac{1}{k^2 + m^2}$. Перенормировке массы соответствуют графики на рис. 1, а

и 1, б. Однако, чтобы сохранить структуру взаимодействия (1), мы будем добавлять контрчлены $\Delta L = \frac{\Delta m^2}{\gamma} (\cos u - 1)$. Нетрудно показать, что добавка такого ΔL соответствует отбрасыванию всех графиков типа рис. 1.

Отметим, что при выполнении свойств 1, 2 амплитуда \mathcal{F} не обладает обычными аналитическими свойствами амплитуд рассеяния для реалистических моделей в квантовой теории поля. Действительно, свойства 1, 2 эквивалентны представлению $\mathcal{F}_{n,n}$ в виде произведения $n - 2$ δ -функций на редуцированную амплитуду $f_{n,n}$:

$$\mathcal{F}_{n,n} = I f_{n,n}, \quad I = \frac{1}{n!} \sum_{\text{по перестановкам}} \prod_{i=1}^n \delta^1(k_{i1} - k_{a_i 1}). \quad (2)$$

{ a_1, \dots, a_n }

Такое представление будем называть структурой 1, 2. Будем предполагать, что редуцированная амплитуда $f_{n,n}$ имеет те же аналитические свойства, что и $\mathcal{F}_{n,n}$ в обычных моделях. При этом замечательно, что отсутствие множественного рождения не противоречит кроссингу.

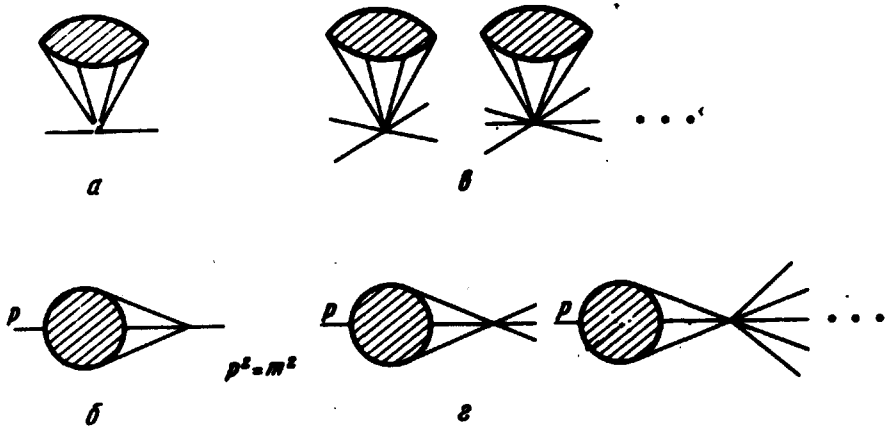


Рис. 1

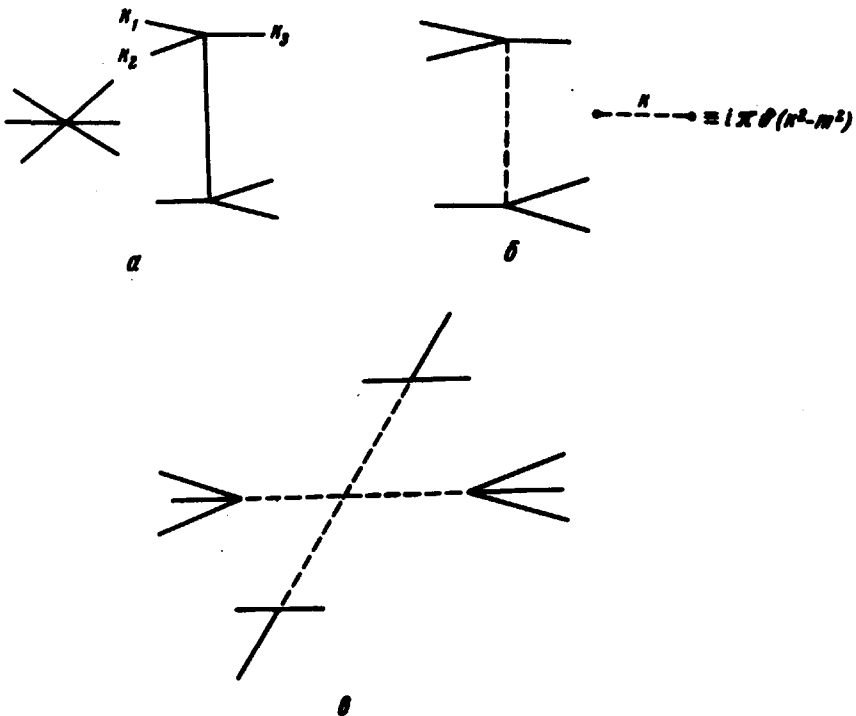


Рис. 2

Проверять структуру 1, 2 мы будем по ТВ. В приближении деревьев S -матрица определяется рассеянием решений классических уравнений, поэтому свойства 1 – 3 сохраняются. Например, амплитуда $\mathcal{F}_6^{(-1)}$, вычисленная по графикам рис. 2, а исчезает в канале 2 – 4, а также

в канале 3 - 3, за исключением того случая, когда конечное состояние совпадает с начальным. В последнем случае при вычислении второго графика рис. 2, а возникает неопределенность, которую раскрываем следующим образом:

$$\frac{1}{m^2 - (k_1 + k_2 - k_3)^2 - i\epsilon} \mathcal{F}\left(\frac{1}{m^2 - (k_1 + k_2 - k_3)^2}\right) + i\pi\delta(m^2 - (k_1 + k_2 - k_3)^2). \quad (3)$$

Равенство (3) справедливо в смысле обобщенных функций, т. е. для рассеяния конечных пакетов. Вклад главных значений сокращается с первым графиком рис. 2, и. Вся амплитуда $\mathcal{F}_{3,3}^{(-1)}$ описывается графиком рис. 2, б. Нетрудно показать, что и любая амплитуда $\mathcal{F}_{n,n}^{(-1)}$ вычисляется как сумма деревьев с четверными вершинами и пунктирными внутренними линиями (рис. 2, в). Отсюда непосредственно следует структура 1, 2 для $\mathcal{F}_{n,n}^{(-1)}$.

Можно, однако, было бы думать, что $\mathcal{F}_{3,3}$ является аналитическим продолжением $\mathcal{F}_{2,4}$ (как это бывает в реальных моделях), т. е. $\mathcal{F}_{3,3}^{(-1)} = 0$. Однако, легко убедиться, что по ТВ равенство $\mathcal{F}_{3,3}^{(-1)} = 0$ противоречит условию унитарности (У).

При доказательстве структуры 1, 2 для $\mathcal{F}_{n,n}^{(0)}$ будем использовать то, что в двумерном пространстве любой однопетлевой график выражается через элементарные функции. Сформулируем правило для произвольной петли. Она является суммой по всевозможным парам внутренних линий с импульсами k_1 и k_2 . k_1 и k_2 находим из условий $k_1^2 = k_2^2 = m^2$. Вклад выделенной пары равен двум слагаемым, каждое из которых - произведение $\Phi(k_1, k_2)$ на две амплитуды типа деревьев D_1 и D_2 , которые являются дополнением линий с импульсами k_1 и k_2 до всей петли; $\Phi(k_1, k_2)$ задается выражением

$$\text{Re} \left[\frac{1}{8\pi\sqrt{-st}} \ln \frac{\sqrt{-s} - \sqrt{t}}{\sqrt{-s} + \sqrt{t}} \right] + i \frac{\theta(k_{10})\theta(-k_{20}) + \theta(-k_{10})\theta(k_{20})}{4\sqrt{-st}},$$

$$s = (k_1 + k_2)^2, \quad t = (k_1 - k_2)^2.$$

Символически эта формула изображена на рис. 3. Перейдем к проверке структуры 1, 2 в одной петле. Из У для $\mathcal{F}_{2n}^{(0)}$ следует, что $\text{Im} \mathcal{F}_{2n}^{(0)}$ имеет структуру 1, 2. Убедимся, что в некоторой области изменения переменных вся амплитуда $\mathcal{F}_{2n}^{(0)}$ обладает той же структурой. В правой части формулы на рис. 3 представим каждый пропагатор в виде (3) и разобьем ее на группы, в каждую из которых входят слагаемые с одинаковым числом δ -функций (от 0 до $n - 2$). Каждая группа в каком-нибудь канале имеет мнимую часть. Из У для $\mathcal{F}_{2n}^{(0)}$ ясно, что все группы, кроме содержащей $n - 2$ δ -функций, сократятся. Следовательно, $\mathcal{F}_{2n}^{(0)}$ имеет в некоторой области структуру 1, 2, а из соображений аналитичности она имеет эту же структуру и при всех значениях переменных.

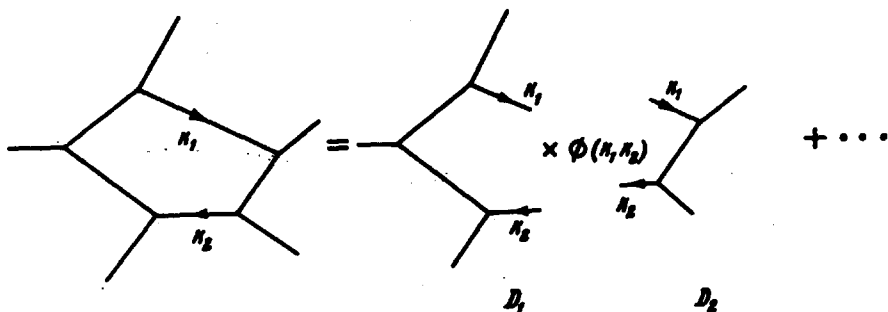


Рис. 3

В l -м порядке ТВ, используя U и предполагая структуру 1,2 для низших порядков, получим, что $\text{Im } \mathcal{F}_{2n}^{(l)}$ имеет ту же структуру. $\text{Re } \mathcal{F}_{2n}^{(l)}$ восстановим из аналитичности редуцированной амплитуды.

При отсутствии множественного рождения U для $f_{2,2}$ легко решить и $S_{2,2}$ имеет вид

$$\langle k_1 k_2 | S | k_1' k_2' \rangle = l \frac{4\sqrt{st} g(s) + \gamma^2}{4\sqrt{st} g(s) - \gamma^2}, \quad s = (k_1 + k_2)^2, \quad t = 4m^2 - s,$$

где $g(s) = A - \sum_n \frac{R_n}{a_n^2 - (s - 2m^2)^2}$, $R_n > 0$, [3]. Растущее слагаемое

из 3 отсутствует, а a_n , по-видимому, лежат на порогах $a_n = (4n^2 - 2)m^2$.

В трех порядках ТВ $g(s)$ равно $\frac{\gamma}{m^2} - \frac{\gamma^2}{8\pi m^2} - \frac{\gamma^3 m^2}{8s(4m^2 - s)}$. При $\gamma \rightarrow 0$

$S_{2,2}(s)$ имеет два полюса в лакуне $(0, 4m^2)$, что можно истолковать как появление новой частицы с массой: $M^2 = 4m^2 - m^2(\gamma/4)^2$.

По аналогии с классическим случаем, предположим факторизацию S -матрицы по двухчастичному рассеянию:

$$S = \exp \left\{ \int \frac{dk_1 dl_1}{k_0 l_0} : \rho(k_1) \rho(l_1) : \phi_{2,2}((k+l)^2) \right\}, \quad (4)$$

где $\rho(k_1) = a^+(k_1) a(k_1)$, $[a(l_1), a^+(k_1)] = k_0 \delta(l_1 - k_1)$ и $\phi_{2,2} = \frac{1}{2} \ln S_{2,2}$.

S -матрица (4) — унитарна и обладает структурой 1, 2. Такое представление мы проверили в первых двух порядках ТВ.

В заключение авторы благодарят Л.Д.Фаддеева, по инициативе которого была сделана эта работа, и В.Н.Грибова за полезные дискуссии, а также П.П.Кулиша и Л.А.Тахтаджяна за обсуждения.

Ленинградское отделение
математического института
им. В.А.Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
14 октября 1974 г.

Литература

- [1] Л.Д.Фаддеев. Современные проблемы математики, М., 3, 1974.
 - [2] Л.Д.Фаддеев, Л.А.Тахтаджян. УМН, 29, 249, 1974.
 - [3] L. Castillejo, R. H. Dalits, F. J. Dyson. Phys. Rev., 101, 453, 1956.
-