Письма в ЖЭТФ, том 20, вып. 10, стр. 684 – 686 20 ноября 1974 г.

ТЕОРЕМА О'РАФЕРТИ ДЛЯ ГРУПП, СОДЕРЖАЩИХ СПИНОРНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ

Б.Г.Конопельченко

Теорема О'Раферти обобщается на случай конечных групп, содержащих спинорные генераторы.

Как известно, основным препятствием на пути релятивизации групп внутренней симметрии является теорема О'Раферти [1]. Из этой теоремы следует, что в неприводимых представлениях конечных групп Ли оператор квадрата импульса может принимать либо однофиксированное значение, либо непрерывный спектр значений.

В последнее время рассматриваются группы симметрии, отличные от групп Ли – так называемые группы суперсимметрии [2 – 5]. Группы суперсимметрии содержат преобразования, генераторы которых являются спинорами по отношению к группе Лоренца. Следовательно, для сохранения правильной связи спина и статистики мы должны рассматривать антикоммутаторы между такими генераторами. В связи с тем, что перестановочные соотношения для групп, содержащих спинорные генераторы, включают и антикоммутаторы, возникла надежда обойти теорему О'Раферти [4 – 6].

В настоящей статье мы покажем, что теорема О'Раферти обобщается на случай произвольных конечных групп, содержащих спинорные генераторы.

Рассмотрим конечную группу, алгебра G которой содержит в качестве подалгебры алгебру Пуанкаре с образующими $J_{\mu\nu}$ и P_ρ ($\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2, 3$). Обозначим операторы алгебры G, преобразующиеся как четырехкомпонентные спиноры через $Q_{\alpha i}$, где α – спинорные индексы ($\alpha = 1,2,3,4$), i – набор индексов, например, группы внутренней симметрии, а все остальные операторы алгебры G (исключая $J_{\mu\nu}$ и P_ρ) – через A_i.

Докажем, что, если оператор квадрата импульса $P^2 = P_\mu P_\mu$ и любая его степень являются самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве H представления алгебры G, и если спектр оператора P^2 в H содержит дискретную точку m^2, то пространство H_m, принадлежащее собственному значению m^2 замкнуто и инвариантно относительно операторов, представляющих в H алгебру G (обобщенная теорема О'Раферти).

Доказательство замкнутости H_m совпадает с аналогичным доказательством работы [1]. Покажем, что пространство H_m инвариантно относительно операторов, представляющих алгебру G.

Рассмотрим операторы A_i. Поскольку перестановочные соотношения операторов A_i между собой и с операторами P_μ содержат только коммутаторы, то для операторов A_i справедливо доказательство леммы I работы [1]. Далее, рассуждая аналогично [1] убеждаемся, что пространство H_m инвариантно относительно операторов, представляющих A_i.

Для спинорных операторов $Q_{\alpha i}$ также справедливо утверждение леммы I работы [1]. Действительно, в силу лоренц-инвариантности перестановочные соотношения операторов P_μ и $Q_{\alpha i}$ имеют вид

$$[P_\mu, Q_{\alpha i}] = a(V_\mu Q)_{\alpha i}, \tag{1}$$

где V_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) – четырехрядные матрицы, a – произвольное число (в частности, нуль). Учитывая, что $[P_\mu, P_\nu] = 0$, из тождеств Якоби для операторов P_μ и $Q_{\alpha i}$ находим

$$[P_\mu, [P_\nu, Q_{\alpha i}]] + [P_\nu, [Q_{\alpha i}, P_\mu]] = 0. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$V_\mu V_\nu = 0, \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \tag{3}$$

т. е.

$$V_\mu \sim (1 \pm \gamma_5)\gamma_\mu,$$

где γ_μ – γ – матрицы Дирака, $\gamma_5^2 = 1$.
Следовательно

$$[P_\mu, [P_\nu, Q_{\alpha i}]] = 0,$$

что и является утверждением леммы I [1] для операторов $Q_{\alpha i}$. Далее, используя лемму II работы [1] аналогично [1], убеждаемся, что пространство H_m инвариантно относительно операторов, представляющих $Q_{\alpha i}$.

Таким образом, пространство H_m инвариантно относительно всех операторов алгебры G. Теорема доказана.

Из обобщенной теоремы О'Раферти следует, что в неприводимых представлениях любых конечных групп симметрии (как содержащих, так и не содержащих спинорные генераторы) оператор P^2 принимает либо одно фиксированное значение, либо непрерывный спектр значений. Тем самым, включение спинорных операторов в группы симметрии не дает возможность объяснить спектр масс частиц внутри мультиплетов.

Институт ядерной физики
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Поступила в редакцию
14 октября 1974г.

Литература

[1] L.O'Raifeartaigh. Phys. Rev. Lett., 14, 575, 1965.

[2] Ю.А.Гольфанд, Е.П.Лихтман. Письма в ЖЭТФ, 13, 452, 1971.

[3] J.Wess, B.Zumino. Nucl. Phys., B70, 39, 1974.

[4] J.Wess, B.Zumino. Phys. Lett., B49, 52, 1974.

[5] A.Salam, J.Strathdee. Nucl. Phys., B76, 477, 1974.

[6] B.Zumino. CERN preprint TH-1901, 1974.