Письма в ЖЭТФ, том 39, вып. 7, стр. 320 – 324 *10 апреля 1984 г.*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ОДНООСНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

А.Е.Боровик, С.И.Кулинич

Построены конструкции метода обратной задачи рассеяния для исследования нелинейной динамики ферромагнетиков с анизотропией типа "легкая ось" и "легкая плоскость".

1. Одномерная динамика ферромагнетика с анизотропией типа " избранная ось" описывается уравнением Ландау – Лифшица (Л – Л), вида (волны распространяются вдоль избранной оси)

$$\vec{\mu}_t = \vec{\mu} \times \vec{\mu}_{zz} + 4\beta^2 (\vec{\mu} \times \mathbf{n})(\vec{\mu}\,\mathbf{n}), \qquad (1)$$

где $\vec{\mu} = \mathbf{M}/|\mathbf{M}|$; $\mathbf{M}$ – вектор-плотность магнитного момента среды, $t = g\,|\mathbf{M}|\,\tilde{t}$, $\hat{t}$ – время, g – гиромагнитное отношение, $z = \alpha^{-1/2}\tilde{z}$, $\tilde{z}$ – пространственная переменная, α – константа неоднородного обменного взаимодействия, β^2 – постоянная, определяемая энергией анизотропных взаимодействий в кристалле, $\mathbf{n}$ – орт вдоль избранной оси (ось z-ов).

Нахождению точных решений уравнения (1) посвящено много работ (см., например, [1]), однако, конструкция метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), которая по нашему мнению доставляет наиболее полную информацию о решениях исследуемого нелинейного уравнения эволюции, до настоящего времени для уравнения Л – Л построена не была, несмотря на то, что для него найдено бесконечное число представлений Лакса [2]. В работе построена замкнутая конструкция МОЗР для обоих физически различных случаев знака константы β^2 в уравнении Л – Л (1).

Всюду в статье под нижним буквенным индексом мы понимаем соответствующую частную производную.

2. Ферромагнетик с анизотропией типа "легкая ось" ($\beta^2 > 0$)

Как показано в [3], в случае $\beta^2 > 0$ уравнение (1) калибровочно эквивалентно (в смысле Захарова) нелинейному уравнению Шредингера (случай притяжения), проинтегрированному Захаровым и Шабатом [4]. В качестве пары Лакса выберем пару [2], имеющую вид

$$\varphi_z^\alpha = A_1^{\alpha\beta}\varphi^\beta \qquad A_1 = i\begin{pmatrix}\lambda\mu\,; & (\lambda - i\beta)\mu^- \\ (\lambda + i\beta)\mu^+\,; & -\lambda\mu\end{pmatrix}, \tag{2а}$$

$$\varphi_t^\alpha = B_1^{\alpha\beta}\varphi^\beta \qquad B_1 = i\begin{pmatrix}2(\lambda^2+\beta^2)\mu + \lambda\tau\,; & (\lambda - i\beta)(2\lambda\mu^- + \tau^-) \\ (\lambda + i\beta)(2\lambda\mu^+ + \tau^+)\,; & -2(\lambda^2+\beta^2)\mu - \lambda\tau\end{pmatrix}, \tag{2б}$$

где $\mu = \mu^3$; $\mu^\pm = \mu^1 \pm i\mu^2$; $2i\tau = \mu_x^+\mu^- - \mu^+\mu_x^-$; $\pm i\tau^\pm = \mu^\pm\mu_x - \mu\mu_x^\pm$; λ – свободный параметр. В динамике легкоосного ферромагнетика естественно рассматривать состояния с $\mu = 1$; $\mu^\pm = 0$ $|z| \to \infty$. Невозмущенное линейное уравнение, порождаемое матрицей A_1 ($|z| = \infty$) $= i\lambda\sigma_3$, имеет фундаментальную матрицу решений, $\Phi = \exp(i\lambda\sigma_3 z)$, а спектральная задача (2а) обладает инволюцией $\varphi = \sigma_2\varphi^*\sigma_2$ (σ_i – матрицы Паули). Пусть $\varphi^\pm$ суть фундаментальные матрицы решений Иоста (2а) ($\varphi^\pm \to \Phi$ при $z \to \pm\infty$, соответственно). Тогда из инволюции и $\mathrm{Sp}\,A_1 = 0$ следует, что

$$\varphi^- = \varphi^+ T_1\,; \qquad T_1 = \begin{pmatrix}a_1^*\,; & b_1 \\ -b_1^*\,; & a_1\end{pmatrix} \qquad \det T_1 = 1. \tag{3}$$

Первый столбец матрицы Иоста $\varphi^+ - \varphi_1^+$ и второй столбец матрицы Иоста $\varphi^- - \varphi_1^-$ аналитичны в верхней полуплоскости λ и имеют асимптотики

$$\varphi_1^+ e_1^- \to \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \quad \varphi_2^- e_1^+ \to \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}; \quad e_1^\pm = \exp(\pm i\lambda z)\,; \quad |z| \to \infty\,; \quad \mathrm{Im}\,\lambda > 0$$

также аналитично в верхней полуплоскости, и нули $a_1(\lambda^k) = 0$ соответствуют дискретному спектру. Уравнение (2б) определяет эволюцию данных рассеяния:

$$a_1(\lambda\,; t) = a_1(\lambda\,; 0)\,; \qquad b_1(\lambda\,; t) = b_1(\lambda\,; 0)\exp[4i(\lambda^2 + \beta^2)t].$$

Матрица решений Иоста имеет треугольное представление

$$\varphi^+(z\,;\lambda) = \Phi(z;\lambda) + \int_z^\infty K_1(z\,; s; \lambda)\Phi(s\,;\lambda)\,ds\,; \quad K_1 = \begin{pmatrix}\lambda K_1^1\,; & (i\beta - \lambda)K_1^{2*} \\ (\lambda + i\beta)K_1^2\,; & \lambda K_1^{1*}\end{pmatrix},$$

где не зависящие от $\tilde\lambda$ функции K_1^1, K_1^2 являются решением задачи,

$$K^1_{1,zs}(z\,;s) = -\mu K^1_{1,ss}(z\,;s) - \mu^- K^2_{1,ss}(z;s) + \beta^2\mu^- K_1^2(z\,;s), \tag{4а}$$
$$K^2_{1,z}(z;s) = \mu K^2_{1,s}(z\,;s) - \mu^+ K_1^1(z;s)$$

с условиями на диагонали

$$i\mu^- K_1^2(z;z) = [1 + iK_1^1(z;z)](1-\mu),$$
$$iK_1^2(z;z)(1+\mu) = [1 + iK_1^1(z;z)]\mu^+, \tag{4б}$$
$$K^1_{1,z}(z; s = z) = -\mu K^1_{1,s}(z; s = z) - \mu^- K^2_{1,s}(z; s = z).$$

Интегрируя (3) по вещественной оси λ с множителем $(2\pi)^{-1}\exp(i\lambda y)$, получаем интегро-дифференциальные уравнения типа Марченко

$$iF_1(z+y)+K^{2*}_{1,y}(z;y)+\beta K^{2*}_1(z;y)-\int_z^\infty K^1_1(z;s)F_{1,y}(y+s)ds=0,$$

$$K^{1*}_{1,y}(z;y)+\int_z^\infty K^2_1(z;s)\{F_{1,y}(y+s)-\beta F_1(y+s)\}ds=0, \qquad (5)$$

$$F_1(z)=\int_{-\infty}^\infty\frac{d\lambda}{2\pi}\exp(i\lambda z)b_1/a_1-i\sum_k\exp(i\lambda^k z)b_1(\lambda^k)/a_{1,\lambda}(\lambda^k).$$

Решения (5) определены с точностью до произвольной функции f_1, $\widetilde{K}^2_1=f_1K^2_1$; $\widetilde{K}^1_1=f_1K^1_1+i(1-f_1)$. Однако, из условия на диагонали (4б) следует, что μ, $\mu^\pm$ не зависят от вещественной f_1. При этом, подставляя найденные из (4б) μ; $\mu^\pm$ в третье условие на диагонали (4б), мы получаем уравнение, определяющее функцию f_1, и конструкция МОЗР замыкается. Солитонные решения мы получаем при рассмотрении в ассоциированной задаче рассеяния (2а) потенциалов без отражения ($b_1(\lambda)=0$), с комплексными собственными значениями λ^k. Учет внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси анизотропии не меняет принципиально метода.

3. Ферромагнетик с анизотропией типа "легкая плоскость"

В легкоплоскостном ферромагнетике будем исследовать состояния с $\mu(|z|=\infty)=0$ и $\mu^\pm(z=\infty)=1$, $\mu^\pm(z=-\infty)=\exp(\pm ic)$, где c – некоторая постоянная. Пара Лакса в этом случае имеет вид [2],

$$\psi^\alpha_z=A_2^{\alpha\beta}\psi^\beta;\qquad A_2=i\begin{pmatrix}\lambda\mu;&(\lambda+\beta)\mu^-\\(\lambda-\beta)\mu^+;&-\lambda\mu\end{pmatrix}, \qquad (6а)$$

$$\psi^\alpha_t=B_2^{\alpha\beta}\psi^\beta;\qquad B_2=i\begin{pmatrix}2(\lambda^2-\beta^2)\mu+\lambda\tau;&(\lambda+\beta)(2\lambda\mu^-+\tau^-)\\(\lambda-\beta)(2\lambda\mu^++\tau^+);&-2(\lambda^2-\beta^2)\mu-\lambda\tau\end{pmatrix}. \qquad (6б)$$

Невозмущенные уравнения $\psi_z=A_2^\pm\psi$; $A_2^+=A_2(z=\infty)$; $A_2^-=A_2(z=-\infty)$ имеют фундаментальные матрицы решений, соответственно,

$$\Psi^+=\begin{pmatrix}e_2^+;&\zeta e_2^-/(\beta-\lambda)\\\zeta e_2^+/(\beta+\lambda);&e_2^-\end{pmatrix};\qquad \Psi^-=\begin{pmatrix}\exp(-ic)e_2^+;&\zeta e_2^-/(\beta-\lambda)\\\zeta e_2^+/(\beta+\lambda);&\exp(ic)e_2^-\end{pmatrix};$$

Спектральная задача (6а) обладает инволюцией $\psi=(\beta\sigma_1+i\lambda\sigma_2)\psi^*(\beta\sigma_1+i\lambda\sigma_2)^{-1}$ и между фундаментальными матрицами Иоста $\psi^\pm\to\Psi^\pm$ при $z\to\pm\infty$ есть связь

$$\psi^-=\psi^+T_2;\qquad T_2=\begin{pmatrix}a_2^*;&(\beta+\lambda)b_2\\(\beta-\lambda)b_2^*;&a_2\end{pmatrix};\qquad \det T_2=1. \qquad (7)$$

Первый столбец матрицы Иоста ψ^+ и второй столбец матрицы Иоста ψ^- аналитичны на верхнем листе двулистной Римановой поверхности $\zeta=(\lambda^2-\beta^2)^{1/2}$; $a_2(\lambda)$ также аналитична на верхнем листе этой поверхности, и нули $a_2(\lambda^k)=0$ определяют дискретный спектр задачи (6а). Из (6б) следует эволюция данных рассеяния: $a_2(\lambda;t)=a_2(\lambda;0)$; $b_2(\lambda;t)=b_2(\lambda;0)\exp(4i\lambda\zeta t)$. Матрица решений Иоста имеет треугольное представление вида

$$\psi^+(z;\lambda)=\Psi^+(z;\lambda)+\int_z^\infty K_2(z;s;\lambda)\Psi^+(s;\lambda)ds;\quad K_2=\begin{pmatrix}\lambda K^1_2;&(\beta+\lambda)K^2_2\\(\beta-\lambda)K^{2*}_2;&\lambda K^{1*}_2\end{pmatrix}, \qquad (8)$$

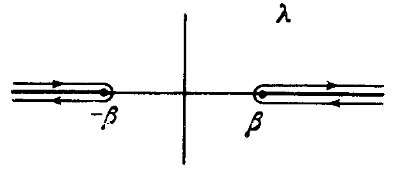
где не зависящие от λ функции K^1_2, K^2_2 являются решением задачи,

$$K^2_{2,zs}(z;s) = -\mu K^1_{2,ss}(z;s) + \mu^+ K^{2*}_{2,ss}(z;s) + \beta^2 \mu K^1_2 \tag{9а}$$

$$K^1_{2,z}(z;s) = -\mu K^2_{2,s}(z;s) - \mu^- K^{1*}_{2,s}(z;s),$$

$$-i + K^2_2(z;z) = -i\mu^- + \mu K^1_2(z;z) - \mu^- K^{2*}_2(z;z); \quad -K^1_2(z;z) = i\mu - \mu^- K^{1*}_2(z;z) - \mu K^2_2(z;z),$$

$$K^2_{2,z}(z;s=z) = -\mu K^1_{2,s}(z;s=z) + \mu^- K^{2*}_{2,s}(z;s=z). \tag{9б}$$



Интегрируя (7) по изображенному на рисунке контуру с интегрирующими множителями $\exp(i\zeta y)/4\pi(\lambda+\beta)$; $\lambda\exp(i\zeta y)/4\pi(\lambda+\beta)$, получаем уравнения типа Марченко, соответственно,

$$F^1_2(z+y) - K^1_2(z;y) + \int_z^\infty \{K^1_2(z;s)F^2_2(y+s) - iK^2_2(z;s)F^1_{2,y}(y+s)\}ds = 0,$$

$$F^2_2(z+y) - iK^2_{2,y}(z;y) + \int_z^\infty \{K^1_2(z;s)[\beta^2F^1_2(y+s) - F^1_{2,yy}(y+s)] -$$

$$- iK^2_2(z;s)F^2_{2,y}(y+s)\}ds = 0,$$

где

$$F^1_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta d\zeta}{4\pi\lambda} \exp(i\zeta z)[b_2(\lambda)/a_2(\lambda) - b_2(-\lambda)/a_2(-\lambda) - \frac{i}{2}\Sigma\exp(i\zeta^k z)b_2(\lambda^k)/a_{2,\lambda}(\lambda^k),$$

$$F^2_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta d\zeta}{4\pi} \exp(i\zeta z)[b_2(\lambda)/a_2(\lambda) + b_2(-\lambda)/a_2(-\lambda)] - \frac{i}{2}\Sigma\exp(i\zeta^k z)\lambda^k b_2(\lambda^k)/a_{2,\lambda}(\lambda^k).$$

Решения (10) определены с точностью до произвольной функции f_2, $\widetilde{K}^1_2 = f_2K^1_2$; $\widetilde{K}^2_2 = f_2K^2_2 + i\,(1-f_2)$. Из условия на диагонали (9б) следует, что $\mu, \mu^\pm$ не зависят от f_2 и аналогично предыдущему случаю конструкция МОЗР замыкается. Солитоны соответствуют в спектральной задаче (6а) потенциалам без отражения с вещественным дискретным спектром, а безотражательным потенциалам с парой комплексно-сопряженных собственных значений соответствуют бионы. Построенная нами конструкция обобщается на случай внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси анизотропии.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность профессору В.А.Марченко, С.А.Гредескулу, В.П.Котлярову, Л.А.Пастуру, Е.А.Хруслову за подробные обсуждения полученных результатов и ценные советы.

Литература

1. *Боровик А.Е.* Статические и динамические свойства пространственно-неоднородных структур в магнетиках. Диссертация. Харьков, 1982 г; *Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С.* Динамические и топологические солитоны. Киев, Наукова думка, 1983 г.

В случае ферромагнетика с анизотропией типа "легкая плоскость" возникает зависящий от внешнего поля невозмущенный оператор A_2 $(|z| = \infty)$, а состояния магнетика при $|z| \to \infty$ также существенно зависят от поля.

2. *Боровик А.Е., Робук В.Н.* ТМФ, 1981, 46, 371.
3. *Котляров В.П.* ДАН УССР, сер. А, 1981, №10, стр. 913.
4. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* ЖЭТФ, 1971, 61, 118.

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
1 марта 1984 г.