Письма в ЖЭТФ, том 19, вып. 6, стр. 342 – 346 *20 марта 1974 г.*

О СВЯЗИ N-СОЛИТОННОГО РЕШЕНИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА С РЕШЕНИЕМ УРАВНЕНИЯ КДВ

Т.Л.Перельман, А.Х.Фридман, М.М.Ельяшевич

Нелинейное преобразование Miura [1], которое переводит N-солитонное решение модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза в N-солитонное решение уравнения Кортевега – де Вриза, является следствием унитарного преобразования операторных соотношений, связанных с этими уравнениями.

Уравнения Кортевега – де Вриза (КДВ)

$$u_t + 6uu_x \pm u_{xxx} = 0 \qquad (1^{\pm})$$

и модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза (МКДВ)

$$v_t + 6v^2 v_x \pm v_{xxx} = 0 \qquad (2_{\pm})$$

имеют бесконечное число полиномиальных законов сохранения и могут быть решены методом обратной задачи рассеяния (ОЗР).

Особое место среди этих уравнений занимает модифицированное КДВ уравнение (2–), однопараметрическое солитонное семейство решений которого

$$v = 1 - \frac{2\nu^2}{\left[1-(1-\nu^2)^{1/2}\right]\left[1+\frac{2(1-\nu^2)^{1/2}}{1-(1-\nu^2)^{1/2}}\operatorname{ch}^2\eta\right]} = 1 - \nu \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \operatorname{th}(\eta + \sigma\Delta), \tag{3}$$

(где $\eta = \nu[x - (6 - 4\nu^2)t]$, $\Delta = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\nu}{1-\nu}$, $0 < \nu < 1$) имеет отношение к остальным уравнениям КДВ типа, допускающим решение методом ОЗР. Уравнение (2–) допускает также решение типа ударной волны

$$v = \operatorname{th}(x - 2t). \tag{4}$$

1. Для того, чтобы применить к уравнению (2–) метод ОЗР перепишем его в виде

$$L_t = i[L, A] = i(LA - AL), \tag{5}$$

где

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial x} + v\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(i\frac{\partial}{\partial x}v^2 + v^2 i\frac{\partial}{\partial x}\right) - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\left(i\frac{\partial}{\partial x}v_x + v_x i\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Решая прямую и обратную спектральную задачу для оператора L [3], можно получить решения уравнения (2), имеющие вид

$$v = 1 + \frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{f_1}{f_2}, \quad f_{1,2} = 1 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{{}_N C_n} a_{1,2}(i_1, \ldots, i_n)\exp[-2(\eta_{i_1}, \ldots, \eta_{i_n})] \tag{6}$$

$\sum_{{}_N C_n}$ – означает сумму всевозможных комбинаций по n-элементов из N, а коэффициенты $a_{1,2}(i_1, \ldots i_n)$ даются формулами

$$a_{1,2}(i_1, \ldots, i_n) = \prod_{k<1}^{n} a_{1,2}(i_k, i_\ell),$$

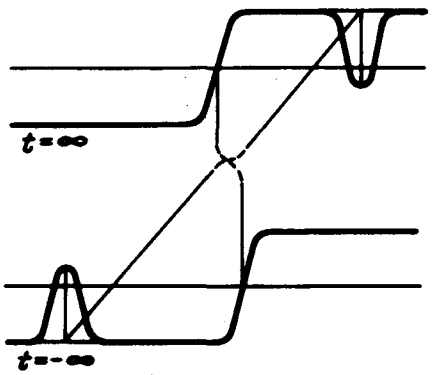
$$a_{1,2}(i_k, i_\ell) = (\nu_{i_k} - \nu_{i_\ell})^2(\nu_{i_k} + \nu_{i_\ell})^{-2}(1 \pm \nu_{i_k})(1 \pm \nu_{i_\ell}),$$

$$a_{1,2}(i_k) = 1 \pm \nu_{i_k},$$

$$\eta_{i_k} = \nu_{i_k}[x - (6 - 4\nu_{i_k}^2)t] + \eta_{i_k}^{\circ},$$

где ν_{i_k} и $\eta_{i_k}^{\circ}$ – произвольные числа, причем все ν_{i_k} – различны.

Совершим в (6) преобразование подобия $v \to a^{-1}v$, $x \to ax$, $t \to a^3 t$. Тогда, если при $\nu_{i_k} \to 0$, $a\nu_{i_k}$ – конечно, перейти к решениям $v = \tilde{v} + a$, обращающимся в нуль на $\pm\infty$, то выражение (6) перейдет в точное N-солитонное решение уравнения КДВ [2]. Подробное обсуждение этого обстоятельства содержится в [4].



Взаимодействие солитона с ударной волной для модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза

Решение (6) описывает два существенно различных случая.

а. Если $\nu_k \neq 1$ $(k = 1, \ldots, N)$, то мы имеем систему взаимодействующих солитонов и решение при $t \to \pm\infty$ представимо в виде

$$v = 1 - \sum_{k=1}^{N} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma\nu \operatorname{th}(\eta_k + \sigma\Delta - \delta_k^{\pm}), \tag{7}$$

где δ_k^+ и δ_k^- – фазы солитонов на $+\infty$ и $-\infty$ соответственно. Таким образом, решение распадается при $t \to \pm\infty$ на N солитонов, которые в процессе временной эволюции от $-\infty$ до $+\infty$ попарно сталкиваются друг с другом, в результате чего более быстрый k-й солитон получает положительный сдвиг фаз (δ_{k_i}), а более медленный i-й солитон-отрицательный $(-\delta_{k_i})$

$$\delta_{ki} = \delta_{ki}^+ - \delta_{ki}^- = \ln\frac{\nu_i + \nu_k}{\nu_i - \nu_k}. \tag{8}$$

б. Если среди чисел ν_k содержится и $\nu_0 = 1$, то в этом случае решение при $t \to \pm\infty$ представляет собой суперпозицию солитонов и ударной

волны

$$v = \mathrm{th}(\eta_o - 2\delta_o^{\pm}) \pm \sum_{k=1}^{N} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \nu_k \,\mathrm{th}(\eta_k + \sigma \Delta_k - \delta_k^{\pm}), \tag{9}$$

где знак + (–) перед суммой соответствует t на $-\infty$ ($+\infty$). Т. е., в результате взаимодействия солитона с ударной волной происходит опрокидывание солитона и солитон приобретает положительный сдвиг фаз ($\delta_{k\,o}$), а ударная волна – отрицательный ($-2\delta_{k\,o}$) (см. рисунок)

$$\delta_{k\,o} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\nu_k}{1-\nu_k}. \tag{10}$$

Впрочем рассмотренный процесс можно интерпретировать, как взаимодействие трех ударных волн, откуда и следует удвоенный сдвиг фаз в первом члене правой части соотношения (9).

2. Нетрудно видеть, что уравнение (2) эквивалентно также операторному соотношению

$$(L^2)_t = i\,[L^2, A]. \tag{11}$$

Подвергнем операторы L^2 и A унитарному преобразованию $L^2 \to T^{-1}L^2T = \hat{L}^2$, $A \to T^{-1}AT = \hat{A}$, где T – унитарный оператор

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & e^{-i\frac{3\pi}{4}} \\ e^{-i\frac{\pi}{4}} & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} \tag{12}$$

тогда из операторного уравнения

$$(\hat{L}^2)_t = i\,[\hat{L}^2, \hat{A}] \tag{13}$$

вытекает, что

$$u = v^2 \pm v_x \tag{14±}$$

удовлетворяет уравнению КДВ (1–). Этот результат был открыт Miura [1] путем сравнения структуры законов сохранения уравнений (1) и (2). Подставляя (6) в (14) и переходя к решениям, обращающимся в нуль на бесконечности, получим N-солитонное семейство решений для уравнений (1–), аналогичное обычному [2].

Изучим сначала временную асимптотику (6) и (14) в случае а. При $t \to \pm\infty$ решение u уравнения (1–) распадается на N солитонов. Их форма определяется по формуле (14) (v из (3)) и имеет вид

$$u = -2\nu_k^2 \,\mathrm{sech}^2(\xi_k \pm \Delta_k - \delta_k^{\pm}) \tag{15}$$

$\xi_k = \nu_k(x - 4\nu_k^2 t)$, где положительный (отрицательный) знак перед Δ_k соответствует положительному (отрицательному) знаку в формуле (14)

перед v_x. Т. е. в процессе временной эволюции от $-\infty$ до $+\infty$ солитоны попарно сталкиваются друг с другом, не меняя своей формы, и получают сдвиги фаз (8).

Покажем, что и решение, соответствующее случаю б, посредством преобразования (14) переходит в N солитонное решение уравнения КДВ.

Решение (14) (v из (9)) распадается при $t \to \pm\infty$ на $N+1$ солитонов, где солитон с максимальной амплитудой порождается ударной волной. Причем при $t \to -\infty$ форма солитонов имеет вид (15), где знак перед Δ_k положительный, при $t \to +\infty$ знак перед Δ_k отрицательный. Разные знаки перед Δ_k при $t \to \pm\infty$ обусловлены опрокидыванием солитона при взаимодействии с ударной волной в решении МКДВ уравнения. Сдвиг фаз, обусловленный взаимодействием солитона с максимальным солитоном вычисляется по формуле

$$\delta_{k_0} + 2\Delta_k = \ln \frac{1+\nu_k}{1-\nu_k} .$$

Максимальный солитон при этом приобретает отрицательный сдвиг ($-2\delta_{k_0}$). Решение (14+) (v из (9)) при $t \to \pm\infty$ распадается на N солитонов. Знаки перед Δ_k в этом случае противоположны знакам (14–), что и приводит к исчезновению сдвига фаз, связанного с ударной волной в решении МКДВ уравнения.

3. Используя решение (3) уравнения (2–) легко получить однопараметрическое периодическое решение уравнения (2+). Совершив в (3) и (2–) преобразование $x \to ix$, $t \to it$, получим

$$v = 1 - \frac{2\nu^2}{[1-(1-\nu^2)^{1/2}]\left[1 + \frac{2(1-\nu^2)^{1/2}}{1-(1-\nu^2)^{1/2}}\cos^2\eta\right]} . \quad (16)$$

Институт тепло- и массообмена
Академии наук Белорусской ССР

Поступила в редакцию
25 января 1974 г.

Литература

[1] R.M.Miura. J. Math. Phys., 9, 1202, 1968.

[2] Ryogo Hirota. Phys. Rev. Lett., 27, 1192, 1971.

[3] В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 64, 5, 1973.

[4] Т.Л.Перельман, М.М.Ельяшевич, А.Х.Фридман. ЖЭТФ, 66, вып. 4, 1974 г.