

Письма в ЖЭТФ, том 19, вып. 6, стр. 371 – 376

20 марта 1974 г.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА МУЛЬТИПЕРИФЕРИЧЕСКИХ ДИАГРАММ

М. С. Дубовиков

Показано, что дифференциальное сечение, соответствующее мультипериферической диаграмме с обменом реджевскими траекториями между тяжелыми блоками, можно представить в виде, аналогичном микроканоническому распределению в термодинамике. Поэтому методы термодинамики с большим эффектом могут быть использованы для вычисления сечения, различных распределений и флукудаций. В качестве примера рассмотрена диаграмма с π -обменом между неприводимыми блоками. Вычислены полное и топологические сечения.

Рассмотрим изображенную на рисунке мультиреджеонную диаграмму с обменом траекториями $a_i(t_i)$ между блоками. Предположим, что амплитуды блоков известны и что интерференцией между различными блоками можно пренебречь. Мы покажем, что сечение, соответствующее мультиреджеонной диаграмме, легко вычисляется методами, развитыми в термодинамике, если выполняется условие

$$s_i \gg q_{\perp i}^2, \quad s_{i, i+1} \gg s_i, \quad s_{i+1}, \quad (1)$$

где $q_{\perp i}$ — поперечный импульс i -го блока.

В дальнейшем увидим, что это условие соответствует условию статистической независимости подсистемы в термодинамике,

При условии (1) можно записать

$$t_i = -\tau_i - \kappa_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad t_0 = t_n = \mu^2, \quad (2)$$

$$\tau_i = (s_{i+1} s_i) / s_{i, i+1}, \quad (3)$$

$$d\Phi = \frac{1}{s} \left\{ \prod_{i=1}^n d\Phi_i ds_i \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \frac{d\kappa_i^2}{4(2\pi)^3} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n-2} d\Delta y_i \right\}, \quad (4)$$

где κ_i — поперечный импульс i -го реджиона, $d\Phi$ — элемент инвариантного фазового объема всех частиц, $d\Phi_i$ — частиц, рожденных в i -м блоке, Δy_i — разность быстрот блоков (см. рисунок).

Амплитуда мультиреджеонной диаграммы равна

$$U = \left\{ \prod_{i=1}^n U_i(t_{i-1}, t_i, s_i, \Phi_i) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \eta[a_i(t_i)] [(s_0 s_{i, i+1}) / (s_i s_{i+1})]^{a_i(t_i)} \right\}, \quad (5)$$

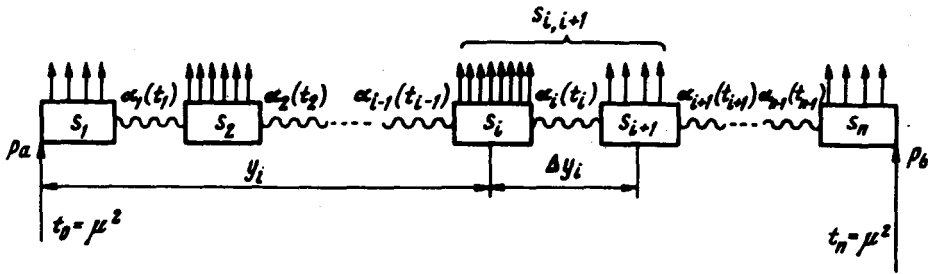
где $U_i(t_{i-1}, t_i, s_i, \Phi_i)$ — амплитуда i -го блока, $\eta[a_i(t_i)]$ — сигнатурный множитель, s_0 вообще говоря произвольно. Для упрощения записи примем s_0 за единицу измерения квадрата энергии.

Сечение, соответствующее мультиреджеонной диаграмме, равно

$$d\sigma = (|U|^2 / 2s) d\Phi = \left\{ \prod_{i=1}^n \tilde{\sigma}_i(t_{i-1}, t_i, s_i) s_i ds_i \right\} \times \\ \times \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \left| \eta[a_i(t_i)] \right|^2 \left(\frac{s_{i, i+1}}{s_i s_{i+1}} \right)^{2a_i(t_i)} \frac{d\kappa_i^2}{2(2\pi)^3} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n-2} d\Delta y_i \right\}, \quad (6)$$

где мы обозначили

$$\tilde{\sigma}_i(t_{i-1}, t_i, s_i) = \left\{ |U_i(t_{i-1}, t_i, s_i, \Phi_i)|^2 / 2s_i \right\} d\Phi_i. \quad (7)$$



Предположим, что зависимость $\tilde{\sigma}_i$ от t_{i-1}, t_i, s_i факторизуется, т. е.

$$\tilde{\sigma}(t_{i-1}, t_i, s_i) = \bar{\sigma}_i(s_i) \phi_i(t_i) \phi_i(t_{i-1}). \quad (8)$$

В литературе обычно $\phi_i(t_k)$ параметризуется в виде

$$\phi_i(t_k) = \exp\left(\frac{1}{2} \Lambda_i t_k\right). \quad (9)$$

Подставляя (8) в (6) и выполняя интегрирование по $d\kappa_i^2$, приходим к выражению

$$d\sigma = \frac{1}{s^2} \left\{ \prod_{i=1}^n \bar{\sigma}_i(s_i) s_i ds_i \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} g_i(r_i) \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n-2} d\Delta y_i \right\}, \quad (10)$$

где

$$g_i(r_i) = \int_0^{\infty} \frac{d\kappa_i^2}{2(2\pi)^3} \left| \eta[a_i(t_i)] \right|^2 r_i^{-2a_i(t_i)} \phi_i(t_i) \phi_{i+1}(t_{i+1}). \quad (11)$$

Введем новые переменные

$$\zeta_i = -\ln r_i, \quad \xi_i = \ln s_i, \quad \xi = \ln s. \quad (12)$$

Легко показать, что

$$\sum_{i=1}^n \xi_i + \sum_{i=1}^{n-1} \zeta_i = \xi. \quad (13)$$

Поэтому формулу (10) можно записать в виде

$$d\sigma = \frac{1}{s^2} \left\{ \prod_{i=1}^n \bar{\sigma}_i(e^{\xi_i}) e^{2\xi_i} d\xi_i \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} g_i(e^{-\zeta_i}) d\zeta_i \right\} \delta\left(\xi - \sum_{i=1}^n \xi_i - \sum_{i=1}^{n-1} \zeta_i\right). \quad (14)$$

Распределение (14) полностью аналогично микроканоническому распределению в термодинамике (см., например [1]), причем роль энергии

подсистем играют ξ_i и ζ_i , а роль плотности состояний играют $g_i(e^{-\xi_i})$ и $\bar{\sigma}_i(e^{\xi_i})e^{2\xi_i}$. Поэтому для вычисления всех интересующих нас величин можно использовать математический аппарат термодинамики, вводя в рассмотрение величины, аналогичные термодинамическим. Хотя физический смысл этих величин совсем другой, нам представляется удобным обозначить их теми же буквами и дать им те же названия, которые приняты в термодинамике, добавляя слово "мультипериферический". Так, мультипериферическая свободная энергия равна

$$F = -T \left\{ \sum_{i=1}^n \ln z_{1i} + \sum_{i=1}^{n-1} \ln z_{2i} \right\}, \quad (15)$$

где T — мультипериферическая температура, z_{1i} , z_{2i} — статистические суммы:

$$z_{1i} = \int e^{-(\xi/T)} \bar{\sigma}_i(e^{\xi}) e^{2\xi} d\xi = \int \bar{\sigma}_i(s) s^{1-(1/T)} ds, \quad (16)$$

$$z_{2i} = \int e^{-(\zeta/T)} g_i(e^{-\zeta}) d\zeta = \int g_i(r) r^{(1/T)-1} dr. \quad (17)$$

Находим энтропию S

$$S = -dF/dt = \sum_{i=1}^n \{ \ln z_{1i} + (\bar{\xi}_i/T) \} + \sum_{i=1}^{n-1} \{ \ln z_{2i} + (\bar{\zeta}_i/T) \}, \quad (18)$$

где через $\bar{\xi}_i$ и $\bar{\zeta}_i$ обозначены средние значения ξ_i и ζ_i

$$\bar{\xi}_i = (1/z_{1i}) \int (\ln s) \bar{\sigma}_i(s) s^{1-(1/T)} ds, \quad (19)$$

$$\bar{\zeta}_i = -(1/z_{2i}) \int (\ln r) g_i(r) r^{(1/T)-1} dr. \quad (20)$$

T является функцией s и определяется приравнованием ξ к мультипериферической энергии:

$$E = F + TS = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\zeta}_i = \xi \equiv \ln s. \quad (21)$$

Наконец, с помощью (18) находим сечение, соответствующее мультипериферической диаграмме:

$$\sigma_n = s^{-2} (2\pi \overline{\Delta E^2})^{-1/2} e^S = \left[2\pi \left(\sum_{i=1}^n \overline{\Delta \xi_i^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \overline{\Delta \zeta_i^2} \right) \right]^{-1/2} \times \\ \times \left\{ \prod_{i=1}^n z_{1i} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} z_{2i} \right\} s^{(1/T)-2}. \quad (22)$$

Рассмотрим пример. Пусть все траектории являются n -мезонными. Блоки выберем неприводимыми, т. е. такими, чтобы внутри их не было

π -обмена. Сигнатурный множитель $\eta(\alpha_\pi)$ определим несколько иначе, чем для остальных траекторий:

$$\eta(\alpha_\pi) = (\pi/2) \alpha_\pi' [i - \text{ctg}(\pi \alpha_\pi / 2)], \quad (23)$$

так, чтобы при $\alpha_\pi' \rightarrow 0$ он переходил в пропагатор $(t - \mu^2)^{-1}$. Для простоты положим все Λ_i в формуле (9) одинаковыми, $\alpha_\pi' = 0$ и пренебрежем квадратом массы пиона. Тогда $\bar{\sigma}_i(s)$ совпадают с сечениями, соответствующими неприводимым блокам. Предположим далее

$$\bar{\sigma}(s) = A s^{-\beta} \text{ при } s > 1, \quad \bar{\sigma}(s) = 0 \text{ при } s < 1, \quad (24)$$

т. е. пороговое значение s примем за единицу. Вычисление термодинамических величин приводит к результату

$$z_1 = A [(1/T) - 2 + \beta]^{-1}, \quad z_2 = \frac{1}{2} (2\pi)^{-3} \Lambda^{1-(1/T)} T \Gamma\left(\frac{1}{T} - 1\right), \quad (25)$$

$$\bar{\xi}_i = [(1/T) - 2 + \beta]^{-1}, \quad \overline{\Delta \xi_i^2} = \bar{\xi}_i^2, \quad (26)$$

$$\bar{\zeta}_i = -\psi[(1/T) - 1] + T + \ln \Lambda, \quad \overline{\Delta \zeta_i^2} = \psi^1\left(\frac{1}{T} - 1\right) + T^2. \quad (27)$$

где ψ, ψ' - пси-функция Эйлера и ее производная.

Как показал Тер-Мартirosян [2], мультипериферические диаграммы без включения померонных обменов приводят к сечению, существенно убывающему лишь при очень больших энергиях $\sim 10^{50}$ Гэв. Если потребовать, чтобы $\sigma_{tot} = \sum \sigma_n \rightarrow \text{const}$, то можно показать, что

$$A = 4(2\pi)^3 \Lambda \beta. \quad (28)$$

При изучении σ_{tot} число блоков удобнее считать переменным. Применение соответствующего аппарата термодинамики приводит к результату

$$\sigma_{tot} = (e^2 \overline{\Delta E^2})^{-1/2} (\bar{n} - 1) z_2^{-1} s^{(1/T) - 2}, \quad (29)$$

$$\overline{\Delta E^2} = \bar{n} \overline{\Delta \xi_i^2} + (\bar{n} - 1) \overline{\Delta \zeta_i^2} + (\xi - \bar{\xi}_i)^2 + (\xi - \bar{\xi}_i)(\bar{\xi}_i + \bar{\zeta}_i), \quad (30)$$

где \bar{n} среднее число блоков - вычисляется по формуле

$$\bar{n} = 1 + [z_1 z_2 / (1 - z_1 z_2)]. \quad (31)$$

Формула для вычисления мультипериферической температуры как функции s аналогична (21)

$$\xi = \bar{n} \bar{\xi}_i + (\bar{n} - 1) \bar{\zeta}_i. \quad (32)$$

Подробные результаты численных расчетов мы приведем в отдельной статье, а здесь отметим один результат: выберем $A = 150 \text{ Гэв}^{-2}$, $\Lambda = 1,5 \text{ Гэв}^{-2}$, $s_0 = 0,1 \text{ Гэв}^2$, $\beta = 0,1$. Тогда при расчете по формуле (25)–(32) получаем: $\sigma_{tot}(0,1 \text{ Гэв}^2) = 150 \text{ Гэв}^{-2}$; $\sigma_{tot}(1,5 \text{ Гэв}^2) = 153 \text{ Гэв}^{-2}$; $\sigma_{tot}(60 \text{ Гэв}^2) = 163 \text{ Гэв}^{-2}$. Видим, что при конечных энергиях сечение растет, хотя в асимптотике оно постоянно.

Московский
физико-технический институт

Поступила в редакцию
6 февраля 1974 г.

Литература

- [1] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Статистическая физика, М., изд. Наука, 1964.
- [2] К.А.Тер-Мартirosyan. Phys. Lett., В44, 179, 1973.
-