Письма в ЖЭТФ, том 19, вып. 8, стр. 496 – 499 *20 апреля 1974 г.*

ЭВОЛЮЦИОННОСТЬ И ШИРИНА УДАРНЫХ ВОЛН

З.Б.Ройхваргер

Показано, что ширина ударных волн определяется мнимой частью волнового вектора расходящихся от разрыва быстро затухающих волн.

Как известно, эволюционность разрыва означает, что существует и единственно решение задачи о малых возмущениях [1, 2], т. е. задав амплитуду падающей на разрыв волны можно однозначно определить амплитуды расходящихся волн. Для определения амплитуд расходящихся волн служит $n-1$ линейное уравнение, где n – число законов сохранения на разрыве, а с помощью одного уравнения исключена амплитуда *возмущения* самого разрыва.

Если пренебрегать диссипацией, то число волн малой амплитуды расходящихся от быстрой и медленной ударных волн равно $n-1$ (шести) и эти разрывы эволюционны.

При учете всех диссипативных эффектов число возможных волн малой амплитуды, распространяющихся в плазме почти удваивается: вместо двух альфвеновских, двух быстрых и двух медленных магнитозвуковых волн, распространяющихся в противоположных направлениях, и одной энтропийной – всего семи – с каждой стороны разрыва появляются 13 различных волн. Число расходящихся от разрыва волн также возрастет.

При отсутствии вырождения, т. е. если нормальная к разрыву компонента скорости плазмы не совпадает с характеристической (все выводы справедливы и для вырожденных эволюционных разрывов), все 13 типов волн с малой действительной частотой ω можно разбить на две группы: в первой 7 бегущих затухающих альфвеновских, энтропийных и магнитозвуковых волн, действительная часть волнового вектора k которых в первом приближении пропорциональна ω, а мнимая – ω^2, во второй 8 быстро затухающих волн, у которых $\mathrm{Re}\,k \sim \omega$, а $\mathrm{Im}k$ в первом приближении не завсит от ω. Коэффициенты затухания ($\mathrm{Im}k$) волн первой группы содержат коэффициенты диссипации в первой степени, а волн второй группы – в минус первой. Поэтому, если устремить коэффициенты диссипации к нулю, волны второй группы исчезнут, а первой – превратятся в незатухающие волны, которые при отсутствии диссипации определяют эволюционность [3].

Метод эволюционности применим лишь тогда, когда можно пренебречь шириной разрыва L, т. е. если $|k| << 1/L$ для падающей и всех расходящихся вне фронта разрыва волн. При конечном L это условие можно выполнить для всех волн первой группы выбрав достаточно малое ω; для волн второй группы этого достичь не удается, так как у них $\mathrm{Im}k$ не зависит от ω.

С другой стороны, вне фронта эволюционного, имеющего стационарную структуру разрыва должно существовать определенное число расходящихся волн; ими являются бегущие волны, не исчезающие при отсутствии диссипации. Следовательно, лишние расходящиеся быстро затухающие волны должны затухать внутри разрыва и вне его фронта отсутствовать.

Таким образом для ширины разрыва имеем

$$L \gtrsim 1/min\,|\,\mathrm{Im}\,k\,|\,, \qquad (1)$$

где (1) выполняется по порядку величины, а min ищется только среди расходящихся быстро затухающих волн.

Для примера приведем более подробное исследование ударных волн в газовой динамике.

В газе по обе стороны разрыва существуют волны вида $\exp[-i(\omega t - kx)]$ со следующей зависимостью k от ω:

$$k_{1,2} = \frac{\omega}{V \pm c}; \quad k_{3-5} = \frac{\omega}{V}; \quad k_{6,7} = -i\frac{V}{\nu};$$

$$k_{8,9} = -i\frac{V^2(\chi + \zeta + {}^4/_3\nu) - c^2\chi/_\gamma \pm \sqrt{B}}{2V\chi(\zeta + {}^4/_3\nu)}, \tag{2}$$

где $B = [V^2(\chi + \zeta + {}^4/_3\nu) - c^2\chi/_\gamma]^2 - 4V^2\chi(\zeta + {}^4/_3\nu)(V^2 - c^2)$ – существенно положительная величина, $V > 0$ – x – компонента скорости газа, c – скорость звука; γ, ν, ζ, χ – соответственно показатель адиабаты, первая и вторая кинематические вязкости и коэффициент температуропроводности. Мы ограничились первым не равным нулю членом разложения k по степеням ω.

Волны с $k_{1,2}$ – звуковые; k_{3-5} – энтропийная и две волны возмущения ротора скорости; волны с k_{6-9} – быстро затухающие. О направлении распространения быстро затухающих волн можно судить по $\mathrm{Im}k$: в устойчивой однородной среде все волны затухают в направлении распространения и поэтому если $\mathrm{Im}k > 0$, то волна распространяется в положительном направлении оси x и наоборот.

При нормальном падении на ударную волну перед которой $V_1 > c_1$, а за которой $V_2 < c_2$ и плоскость которой перпендикулярна оси x мы имеем следующие расходящиеся быстро затухающие волны: вверх по течению волны с k_{6-9}, вниз по течению волна с k_9. Можно показать, что $min\,|\,\mathrm{Im}k\,|$ будет принадлежать волнам с k_9 по одну, либо по другую сторону разрыва. Таким образом окончательно имеем:

$$L \gtrsim max\,|\,2V_{1,2}\chi(\zeta + {}^4/_3\nu) :$$

$$\{V_{1,2}^2(\chi + \zeta + {}^4/_3\nu) - c_{1,2}^2[\chi/\gamma] - \sqrt{[V_{1,2}^2(\chi + \zeta + {}^4/_3\nu) - c_{1,2}^2\chi/_\gamma]^2 - 4V_{1,2}\chi(\zeta + {}^4/_3\nu)(V_{1,2}^2 - c_{1,2}^2)}\}\,|.$$

Для слабых ударных волн $(V_1 - c_1)/V_1 << 1$ и получаем

$L \gtrsim [(\gamma - 1)\chi/\gamma + \zeta + {}^4/_3\nu]/2(V_1 - c_1)$ в согласии с [4].

Автор признателен С.И.Сыроватскому за многочисленные и полезные обсуждения.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
21 февраля 1974 г.

Литература

[1] А.И.Ахиезер, Г.Я.Любарский, Р.В.Половин. ЖЭТФ, 35, 731, 1958.

[2] С.И.Сыроватский. ЖЭТФ, 35, 1466, 1958.

[3] З.Б.Ройхваргер, С.И.Сыроватский. ЖЭТФ, 66, 1338, 1974.

[4] Л.Д.Ландау, Е.М.Лившиц. Механика сплошных сред, изд. 2-е, Гостехиздат, 1959.