Письма в ЖЭТФ, том 19, вып. 8, стр. 499 – 503 *20 апреля 1974 г.*

ОДНОРОДНЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С ГРАВИТАЦИОННЫМИ ВОЛНАМИ И ВРАЩЕНИЕМ

В.Н.Лукаш

Предложены решения для космологических моделей с циркулярно-поляризованными гравитационными волнами произвольной длины λ и (или) вихревыми движениями вещества произвольного масштаба $\mathbf{k}$.

Точные решения уравнений ОТО для космологических задач представляют огромный интерес, в частности, для выяснения соотношения между современным состоянием Вселенной и характером сингулярности. Ниже рассматриваются однородные космологические модели, содержащие гравитационные волны с круговой поляризацией или (и) вихревые движения вещества. Такую интерпретацию допускают некоторые модели VII и VIII типов по классификации Бианки (В данной статье приводится частное решение для модели типа VII_0).

В ходе эволюции прослеживается переход от доволновой ситуации, $\lambda > t$, к волновой, $\lambda < t$, где λ – длина волны[1)].

Благодаря однородности, точное решение уравнений общей теории относительности сводится к интегрированию нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений для зависимости параметров от мирового времени. Идея метода обобщается на случай электромагнитных волн, на одновременное присутствие волн (электромагнитных и гравитационных) и вещества с определенным уравнением состояния, на вихревые движения вещества, на случай присутствия вязкости, свободных (невзаимодействующих) частиц и плазмы, состоящей из заряженных частиц.

Я.Б.Зельдович применил идею о циркулярно-поляризованных волнах к задаче о сильной электромагнитной волне в разреженной плазме. Бла-

---

1) Скорость света и постоянная Эйнштейна равны единице.

годаря очевидной симметрии (электроны движутся по окружности) решение задачи свелось к алгебраическим уравнениям [1, 2].

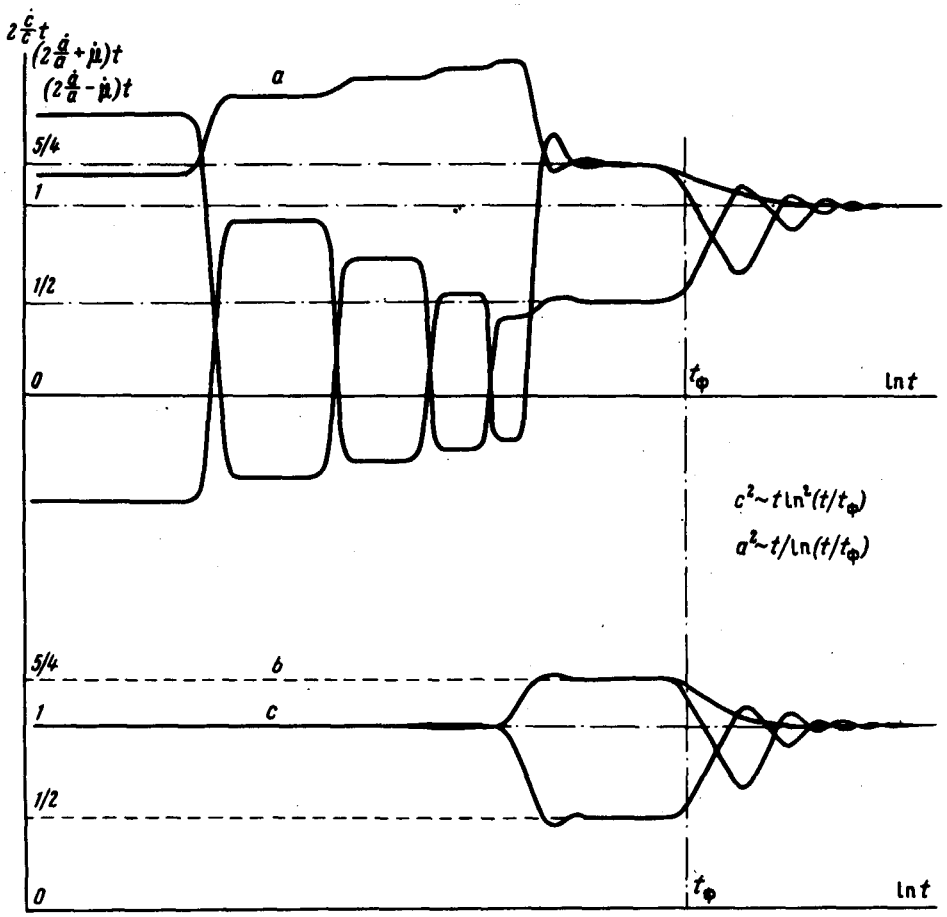
Вернемся к космологии. Представление анизотропной модели, как изотропной, на которую наложена гравитационная волна, дискутировалось давно. При этом, обычно, предполагалось, что для точного сохранения однородности гравитационная волна была бесконечно длинной, если она наложена на бесконечную изотропную открытую или плоскую модель. В случае закрытой модели, (замкнутый мир Фридмана) длина волны предполагалась порядка радиуса мира [3 – 5][1]. Такое ограничение было связано с мысленным образом волны с периодической зависимостью параметров от координат, с пучностями и узлами, что очевидно, нарушает пространственную однородность.

В предлагаемом классе космологических решений рассматриваются циркулярно-поляризованные волны (стоячие и бегущие) и вихревые движения вещества. В них скалярные величины (квадрат амплитуды, вихрь и т. д.) не зависят от координаты z, направленной по волновому вектору $\mathbf{k}$. Векторные и тензорные величины в плоскости x, y, перпендикулярной волновому вектору, испытывают поворот при смещении по z. Таким образом, группа трансляций имеет структуру более сложную (винтовая комбинация сдвига по z с поворотом), чем в тривиальном случае, что, однако, не исключает построение строго однородных моделей с полной эквивалентностью всех точек пространства (сечения $t = \mathrm{const}$).

В период $\lambda < t$ уравнения совпадают с теми, которые получаются для усредненных величин, характеризующих крупномасштабную метрику, если рассматривать гравитационную волну (и ее псевдотензор) наравне с любыми другими типами волн, например, электромагнитными (см. [10, 11]). В этот период ($t \to \infty$) амплитуда гравитационных волн (μ) и вихревая скорость (β) малы, и в уравнениях, описывающих эволюцию, существенным оказывается второй порядок возмущений. В общем случае амплитуда и вихрь растут при приближении к сингулярности. В случае моделей с гравитационными волнами оказывается, что вблизи сингулярности, где линейная теория развитая Лифшицем неприменима, выводы ее качественно подтверждаются : существуют два типа решений, частное-квазиизотропное – с асимптотикой сингулярности мало отличающейся от фридмановской (рис. c) и более общее казнеровское – соответствующее бесконечному (при $t \to 0$) возмущению фридмановской модели (рис. a). Кроме того, существует еще один тип сингулярности, соответствующий бесконечному возмущению фридмановской модели, в котором, однако, существенно тяготение материи вплоть до $t = 0$; см. рис. b (подробнее см. [12 , 13]). В моделях с вихревыми движениями вещества при $t \to 0$ не реализуется ни одна из асимптотик, справедливых для решений, в которых присутствуют только гравитационные волны (см. рис.). В наиболее общем случае решение на "вакуум-

[1] Л.П.Грищук в наиболее общем виде сформулировал гипотезу о том, что любую однородную модель можно представить в виде более симметричной модели с возмущениями (не обязательно малыми) понижающими симметрию [6]. Здесь рассматриваются те модели VII типа Бианки, которые согласно Грищуку являются фридмановскими мирами с наложенными на них векторными и тензорными возмущениями (см. [7 – 9]).

ной" стадии носит осцилляционный характер, подобно известному осцилляционному режиму в модели "перемешанного мира" (IX тип) [14,15]. (Подробнее модели с гравитационными волнами и вихревыми движениями вещества будут рассмотрены отдельно).



Эволюция главных значений тензора деформации в модели с гравитационной волной ($\nu \equiv 0$); $p = \epsilon/3$

Зададимся метрикой вида

$$ds^2 = dt^2 - g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta; \quad x^1 \equiv x; \quad x^2 \equiv y; \quad x^3 \equiv z; \qquad (1)$$

с тензором $g_{\alpha\beta}$

$$\begin{pmatrix} a^2(\mathrm{ch}\,\mu + \mathrm{sh}\,\mu\cos 2kz); & a^2\,\mathrm{sh}\,\mu\sin 2kz; & -a^2\nu e^{-\mu}\sin kz \\ a^2\,\mathrm{sh}\,\mu\sin 2kz; & a^2(\mathrm{ch}\mu - \mathrm{sh}\,\mu\cos 2kz); & a^2\nu e^{-\mu}\cos kz \\ -a^2\nu e^{-\mu}\sin kz; & a^2\nu e^{-\mu}\cos kz; & c^2 + a^2\nu^2 e^{-\mu} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где a, c, μ, ν суть неизвестные функции времени t, волновой вектор $\mathbf{k}$ (для гравитационной волны $2\mathbf{k}$) направлен по z и является произвольным постоянным параметром; $k \in (-\infty; +\infty)$.

Метрика (2) является частным случаем однородной космологической модели VII_0 типа. В этой метрике отличны от нуля следующие компоненты T_a^0 (тензора энергии-импульса), описывающие плотность потока энергии:

$$T_a^0 = (kR/a^2c)\{\cos kz;\ \sin kz;\ 0\};\quad R = -\frac{\dot{\nu}}{2}\frac{a^4}{c}e^{-\mu}; \tag{3}$$

где $a^2c = \sqrt{det\, g_{\alpha\beta}}$; точка означает дифференцирование по синхронному времени t. При $\nu \equiv 0$ однородное пространство (1, 2) является сопутствующим, т. е. исчезают вихревые движения вещества. Если к тому же $\mu \equiv 0$, то остается диагональная метрика с плоским сопутствующим пространством, нет и гравитационной волны.

В заключение выпишем уравнения Эйнштейна для модели (1), (2), заполненной идеальной жидкостью с уравнением состояния $p = a\epsilon$. (На ранних стадиях расширения $a = 1/3$; позже, когда роль излучения мала, $a = 0$). Уравнения гидродинамики в этом случае интегрируются в конечном виде и описывают законы сохранения момента (отсутствие вязкости) и энергии (конфигурация скорости является бессиловой – вихрь коллинеарен скорости (см. (3)).

$$kR = wa^3c\,e^{\mu/2}\,v\sqrt{1+v^2} = \text{const};\quad \epsilon^{\frac{1}{1+a}}\,a^2c\sqrt{1+v^2} = \text{const}; \tag{4}$$

где $v = \beta/\sqrt{1-\beta^2}$; β – трехмерная скорость; $w = \epsilon + p$ – энтальпия. Уравнения поля имеют вид

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{c}}{c}\right) - \frac{R^2}{a^6}e^{\mu} = \frac{\epsilon - p}{2} + \frac{w}{2}v^2; \tag{5}$$

$$\frac{\ddot{c}}{c} + 2\frac{\dot{c}}{c}\frac{\dot{a}}{a} + \frac{2R^2}{a^6}e^{\mu} - \frac{2k^2}{c^2}\operatorname{sh}^2\mu = \frac{\epsilon - p}{2}; \tag{6}$$

$$\ddot{\mu} + \dot{\mu}\left(\frac{\dot{c}}{c} + 2\frac{\dot{a}}{a}\right) + \frac{2R^2}{a^6}e^{\mu} + \frac{2k^2}{c^2}\operatorname{sh}2\mu = wv^2; \tag{7}$$

$$\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{c}}{c}\right) = \frac{R^2}{a^6}e^{\mu} + \frac{k^2}{c^2}\operatorname{sh}^2\mu + \frac{\dot{\mu}^2}{4} + \epsilon + wv^2. \tag{8}$$

Уравнения (5), (6) описывают эволюцию метрики; (7) – волновое уравнение, определяющее амплитуду волны μ. Функция $\nu(t)$ не входит в основные уравнения (5) ÷ (8) и определяется независимо из уравнений (3), (4); $\nu \to 0$ при $t \to \infty$ (о произволе $\nu(t)$ см. [7]). (8) – первый интеграл уравнений (5) ÷ (7).

В модели (1), (2) присутствуют только стоячие гравитационные волны в однородном пространстве $t = \text{const}$. Интересно, что в открытых моделях VII типа (VII_h) возможны бегущие гравитационные волны в сопутствующем однородном пространстве. (В частности, интегрируются в конечном виде модели с одной бегущей гравитационной волной).

Автор благодарен Я.Б.Зельдовичу, за указания многочисленных применений описанных выше результатов, за помощь и многочисленные полезные обсуждения. И.Д.Новикову и А.Г.Дорошкевичу за постоянную помощь и плодотворные дискуссии и обсуждения, Л.П. Грищуку, за многочисленные и полезные дискуссии.

Московский
физико-технический институт

Поступила в редакцию
25 февраля 1974 г.

Литература

[1] Я.Б.Зельдович. Сб. Проблемы теоретической физики. Памяти И.Е.Тамма, М., изд. Наука, 1972.

[2] Я.Б.Зельдович, А.Ф.Илларионов, ЖЭТФ, **61**, 880, 1971.

[3] Л.П.Грищук, А.Г.Дорошкевич, В.М.Юдин. Тезисы докладов Третьей Советской Гравитационной Конференции, Ереван, 1972.

[4] А.В.Бялко. ЖЭТФ, **65**, 849, 1973.

[5] B.K.Berger. University of Maryland; Technical Report 73-024, 1972.

[6] L.P.Grishchuk. Proc. EGAIAU, Cracow, Poland, 1973.

[7] Е.М.Лифшиц. ЖЭТФ, **16**, 593, 1946.

[8] M.Demianski, L.P.Grishchuk. Commun. Math. Phys., **25**, 233, 1972.

[9] L.P.Grishchuk. Bulletin de L'Academie Polonaise des Scien. **19**, 12, 1972.

[10] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля М., изд. Наука, 1967.

[11] R.A.Isaacson. Phys. Rev., **166**, 1263, 1968.

[12] А.Г.Дорошкевич, В.Н.Лукаш, И.Д.Новиков. ЖЭТФ, **64**, 1457, 1973.

[13] В.Н.Лукаш. АЖ, **51**, 281, 1974.

[14] В.А.Белинский, Е.М.Лифшиц, И.М.Халатников. УФН, **102**, 463, 1970.

[15] А.Г.Дорошкевич, И.Д.Новиков. АЖ, **5**, 948, 1970