Письма в ЖЭТФ, том 19, вып. 11, стр. 672 – 676 5 июня 1974 г.

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВТОРОГО ЗВУКА ПЕРВЫМ ЗВУКОМ В ЖИДКОМ ГЕЛИИ II

Н.И.Пушкина, Р.В.Хохлов

Рассмотрено нелинейное комбинационное взаимодействие первого звука со вторым звуком в жидком гелии II – параметрическое возбуждение второго звука за счет возбуждающей волны первого звука. Получено выражение для пороговой интенсивности первого звука, при которой начинается возбуждение волн второго звука. Оценена возможность экспериментального наблюдения явления.

Известно, что при распространении первого и второго звука в жидком гелии II возможны нелинейные явления, обусловленные формально нелинейными членами уравнений гидродинамики. Осборн [1] наблюдал образование ударных волн второго звука, теория которых была дана в работе [2], а затем более точно и подробно в работе Халатникова [3], где рассматривались также ударные волны первого звука. Обра-

зование ударных волн есть, по существу, самовоздействие волн, оно не связано с нелинейным перемешиванием волн различной природы. В данной работе рассматривается иной тип нелинейного взаимодействия – нелинейное комбинационное взаимодействие волн первого и второго звука. Хорошо известно, что при достаточно малых интенсивностях обычный и второй звук распространяются почти независимо друг от друга. Это связано, во-первых, с тем, что в жидком гелии II аномально мал коэффициент теплового расширения, что не дает перемешивания обоих типов волн в линейном приближении, и во-вторых, с тем, что при сравнительно малых интенсивностях волн не проявляется нелинейность среды. При достаточно больших интенсивностях волн возможно появление нелинейных взаимодействий, одним из которых является рассматриваемое параметрическое возбуждение второго звука первым звуком.

Исходим из уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости [4], которые можно преобразовать к виду:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta p = c_1^2 \left\{ -\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\dfrac{1}{2}\rho^2 (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)^2 \dfrac{\partial}{\partial p}\dfrac{\rho_n}{\rho}\right] + \right. \\
\qquad \left. + \nabla \dfrac{\partial}{\partial x_k}(\rho_s v_{sk} \mathbf{v}_s + \rho_n v_{nk} \mathbf{v}_n) \right\}; \\
\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} - c_2^2 \Delta T = -c_2^2 \dfrac{\rho_n}{\rho s}\dfrac{\partial s}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\rho}{s\rho_s}\right) - c_2^2 \dfrac{\rho_n}{\rho s}\dfrac{\partial}{\partial t}\left\{ \dfrac{1}{s\rho_s}\mathbf{V}_n \nabla(\rho s) + \right. \\
\qquad + \dfrac{1}{s\rho_s}\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{1}{2}\rho(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)^2\left(\dfrac{\partial}{\partial T}\dfrac{\rho_n}{\rho} + \rho s \dfrac{\partial}{\partial p}\dfrac{\rho_n}{\rho}\right) - \right. \\
- \dfrac{1}{\rho_s}(\mathbf{V}_s \nabla \rho_s + \mathbf{V}_n \nabla \rho_n) - \dfrac{1}{\rho_s}\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\rho^2 (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)^2 \dfrac{\partial}{\partial p}\dfrac{\rho_n}{\rho}\right]\Bigg\} + \\
\qquad + c_2^2 \dfrac{1}{\rho s}\left\{ \nabla(\rho s)\nabla T + \nabla \rho_n \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s) - \right. \\
- \dfrac{1}{2}\nabla\left[\rho \nabla\left(V_s^2 - \dfrac{\rho_n}{\rho}(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_s)^2\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_k}(\rho_s v_{sk}\mathbf{v}_s + \rho_n v_{nk}\mathbf{v}_n) + \right. \\
\qquad \left. + \mathbf{V}_s \dfrac{\partial \rho_s}{\partial t} + \mathbf{V}_n \dfrac{\partial \rho_n}{\partial t}\right]\Bigg\};
\end{cases}
\tag{1}
$$

Здесь p – давление, T – температура, s – энтропия, ρ – плотность, ρ_n, ρ_s – нормальная и сверхтекучая плотности, $\mathbf{V}_n$, $\mathbf{V}_s$ – скорости нормального и сверхтекучего движений, c_1, c_2 – скорости первого и второго звука.

Предполагаем, что в среде распространяется обычный звук большой интенсивности, который возбуждает параметрически за счет нелинейности среды две волны второго звука, черпающие энергию из возбужда-

ющей волны. Для математического описания этого процесса ищем решение (1) в виде суммы трех волн: возбуждающей волны первого звука $\frac{1}{2}[P\exp i(\mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t) + \text{к. с.}]$ и двух возбужденных волн второго звука $\frac{1}{2}[T_{1,2}\exp i(\mathbf{k}_{1,2}\mathbf{r} - \omega_{1,2}t) + \text{к. с.}]$. При этом предполагаем выполненными равенства, отвечающие законам сохранения энергии и импульса:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2; \qquad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \tag{2}$$

Считаем, что волны распространяются вдоль одной прямой. Так как $c_1 >> c_2$ (например, при $T = 1{,}5°K$), то (2) выполняется при условии

$$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \frac{1}{2}\omega_0; \quad k_0 = k_1 - k_2.$$

(волна T_2 – обратная).
Учитывая затухания волн, получаем следующую систему уравнений для медленно меняющихся с расстоянием амплитуд взаимодействующих волн:

$$\begin{cases} \dfrac{dT_1}{dx} + \dfrac{a}{2}T_1 - i\beta P T_2^* = 0 \\ \dfrac{dT_2}{dx} - \dfrac{a}{2}T_2 + i\beta P T_1^* = 0 \\ \dfrac{dP}{dx} + \dfrac{\gamma}{2}P - i\delta T_1 T_2 = 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Здесь a, γ – амплитудные коэффициенты затухания волн,

$$\beta = \frac{\omega_1}{2c_2\rho_s}\left[\left(1 + 2\frac{\rho_s}{\rho}\right)\frac{1}{c_1^2} - \frac{\rho}{\rho_n}\frac{\partial\rho_n}{\partial p}\right];$$

$$\delta = \frac{c_1\omega_0\rho^2 s^2}{2c_2^2\rho_n}\left[\left(1 + 2\frac{\rho_s}{\rho}\right)\frac{1}{c_1^2} - \frac{\rho}{\rho_n}\frac{\partial\rho_n}{\partial p}\right].$$

Граничные условия : $T_1(0) = T_{10}$; $T_2(l) = 0$; $P(0) = P_0$. l – длина взаимодействия ($T_{10} \neq 0$ за счет рассеяния на флуктуациях). Из (3) получаем следующее выражение для пороговой интенсивности возбуждающего звука, при которой начинается возбуждение температурных волн;

$$I_{\text{пор}} = \frac{1}{2\rho c_1}|P_{0\,\text{пор}}|^2 = \frac{1}{2\rho c_1}\frac{a^2}{4\beta^2}.$$

Сделаем численные оценки порога при $T = 1{,}5°K$.

Полагаем:

$$\omega_0 = 2\cdot 2\pi\cdot 10^5\ сек^{-1},\ a = 0{,}1\ см^{-1},\ c_1 = 2{,}3\cdot 10^4\ см/сек;\ c_2 = 2\cdot 10^3\ см/сек,$$

$$\rho = 0{,}14\ г/см^3,\ \rho_s = 0{,}9\ \rho,\quad \rho_n = 0{,}1\ \rho;$$

величину $\partial\rho_n/\partial p$ оцениваем, используя данные по зависимости от давления величин: скорости c_2 [5] и энтропии и теплоемкости (см., например, [6]).

Получаем:

$$I_{пор} \approx 3\cdot 10^{-3}\ вт/см^2\ .$$

Решение системы (3) (без учета затухания) имеет вид

$$T_1 = P_0\tilde{k}\sqrt{\frac{\beta}{\delta}}\ \mathrm{sn}\,[K + \beta P_0(x - l), \tilde{k}],$$

$$T_2 = P_0\tilde{k}\sqrt{\frac{\beta}{\delta}}\,\mathrm{cn}\,[K + \beta P_0(x - l), \tilde{k}]\ , \qquad (4)$$

$$P = P_0\,\mathrm{dn}\,[K + \beta P_0(x - l), \tilde{k}]\ .$$

Здесь sn, cn, dn – эллиптические функции, $K(\tilde{k})$ – полный эллиптический интеграл первого рода, $\tilde{k}$ определяется из уравнения

$$\frac{T_{10}}{P_0}\sqrt{\frac{\delta}{\beta}} = \tilde{k}\,\mathrm{sn}(K - l\beta P_0, \tilde{k})\ , \qquad (5)$$

которое в случае достаточно большого усиления волн сводится к виду

$$l\beta P_0 = K(\tilde{k})\,. \qquad (6)$$

Исследование решения (4) – (6) показывает, что интенсивность возбужденных температурных волн становится сравнимой с начальной интенсивностью I_0 первого звука на расстоянии l порядка нескольких *см* при $I_0 = 0{,}1\ вт/см^2$.

Рассмотренное взаимодействие может быть использовано для получения второго звука высокой частоты.

Мы признательны В.П.Пешкову и К.Н.Зиновьевой за весьма полезное обсуждение.

Московский
государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
19 апреля 1974 г.

Литература

[1] D.V.Osborne. Proc. Phys. Soc., A64, 114, 1951.

[2] H.Temperley. Proc. Phys. Soc., A64, 105, 1951.

[3] И.М.Халатников. ЖЭТФ, 23, 253, 1952.

[4] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. "Механика сплошных сред". М., Гостехиздат, 1953 г.

[5] В.П.Пешков, К.Н.Зиновьева. ЖЭТФ, 18, 438, 1948.

[6] I. Wilks. "The properties of liquid and solid helium", Oxford, Clarendon press, 1967.