Письма в ЖЭТФ, том 72, вып.5, стр.382 - 387 © 2000г. 10 сентября

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И РЕКОНСТРУКЦИЯ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ В ИНВЕРСИОННЫХ УСЛОВИЯХ

В.Б.Шикин

Институт физики твердого тела РАН

142432 Черноголовка, Московской обл., Россия

Поступила в редакцию 1 июня 2000 г.

После переработки 25 июля 2000 г.

Обсуждается задача о развитии механической неустойчивости нейтральной пленки жидкости (жидкий гелий или водород) в инверсионных условиях (пленка не лежит на твердой подложке, а висит на потолке). Определены критические параметры подобной неустойчивости и характер реконструкции поверхности пленки под влиянием сил Ван-дер-Ваальса, Лапласа и гравитации. Отмечена связь с известной задачей Френкеля об одиночных каплях на твердой подложке. Предлагается электростатический механизм стимуляции неустойчивости тонкой пленки гелия, имеющий перспективы в задаче об утечках сверхтекучего гелия.

PACS: 68.35.Rh

Одной из интересных нейтральных двумерных систем, демонстрирующих механическую неустойчивость, является жидкая пленка, висящая на твердом потолке (инверсионная пленка). Образование подобных пленок осуществляется различными способами. Наиболее известным из них является конденсация заданной порции газа на охлажденные стенки замкнутого резервуара, в частности, на его потолок. Для криогенных жидкостей эта программа осуществлена в [1]. Прецизионный контроль за объемом вводимого газа позволяет управлять толщиной пленки d на потолке в широком интервале ее значений, начиная с микронной области.

Чисто гравитационное поведение инверсионной пленки абсолютно неустойчиво. Учет сил Ван-дер-Ваальса ведет к появлению конечного интервала толщин, в пределах которого возможно механическое равновесие однородной пленки. С ростом ее толщины, в окрестности некоего критического значения d_*, механическая устойчивость системы теряется, причем, как и в других известных случаях (например, в задаче о заряженной тонкой пленке жидкости [2–4]), этот процесс развивается прежде всего на малых волновых числах.

По аналогии с массивной задачей можно думать, что в закритичной области существует некое неоднородное, реконструированное состояние пленки, в котором она продолжает удерживаться на потолке комбинацией сил, включая лапласовское давление. Однако сценарий реконструкции инверсионной пленки до сих пор не ясен. Если для массивной жидкости наблюдаемая периодическая реконструкция связана, в большой степени, с неустойчивостью задачи на конечных волновых числах в окрестности так называемой капиллярной длины [5–7], то для тонкой пленки подобные наводящие соображения отсутствуют (неустойчивы длинноволновые возмущения).

Вариант устойчивого неоднородного состояния жидкости в инверсионных условиях предложен в известной работе Френкеля [8], где обсуждаются свойства жидких капель на поверхности твердого тела, наклоненной под произвольным углом к горизонту. Капля висит на твердом потолке (сила тяжести отрывает жидкость от подложки) как при частичном, так и при полном смачивании, реализуя искомое неоднородное состояние. Однако постановка задачи в [8] исключает предельный переход к однородной пленке жидкости, так как здесь отсутствуют силы Ван-дер-Ваальса и, следовательно, не возникает проблем перестройки.

Обсуждение свойств нейтральной жидкой пленки гелия (водорода) в инверсионных условиях с целью определения критериев ее устойчивости и деталей реконструкции приводится в данной работе.

1. Рассмотрим тонкую пленку жидкости толщиной d, сконденсированную на твердом потолке и имеющую, для начала, плоскую форму. Равновесные, механические свойства пленки определяются двумя факторами: притяжением к потолку ван-дер-ваальсовского происхождения, способным удерживать пленку на твердой подложке в плоском состоянии, и гравитацией, ответственной за возможную неустойчивость пленки.

В обычной геометрии (пленка на твердой подложке) давление Ван-дер-Ваальса вместе с гравитацией формируют монотонный потенциал, удерживающий атомы жидкости вблизи подложки,

$$P = \rho g d \; - \; f/d^3,$$

и имеющий положительную производную $\partial P/\partial d > 0$. Здесь ρ – объемная плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, f – константа взаимодействия Ван-дер-Ваальса (эффекты запаздывания опущены).

Если же константа f имеет обратный знак (пленка на потолке), комбинация

$$P = \rho g d \; + \; f/d^3$$

становится немонотонной, проходя через максимум в точке d_*:

$$\partial P/\partial d_{|d_*} = 0, \quad d_*^4 = 3f/\rho g. \tag{1}$$

В условиях $d > d_*$ силы Ван-дер-Ваальса недостаточны для удержания плоской инверсионной пленки на потолке, и в задаче возникает неустойчивость. Однако если пленка с $d > d_*$ перестает быть плоской,

$$d(x) = d \; + \; \xi(x), \quad \int_{-L}^{+L} d(x)dx = 2Ld \tag{2}$$

($2L$ – размеры пленки в горизонтальном направлении), то можно ожидать сохранения механического равновесия в некоем интервале значений параметра δ:

$$\delta = (d - d_*)/d_*. \tag{3}$$

Подобная ситуация возможна благодаря появлению в балансе сил лапласовского давления, стабилизирующих форму пленки $d(x)$ и в условиях $d > d_*$.

Следует отметить, что при конечной температуре, $T \neq 0$, все жидкопленочные образования на потолке неустойчивы. Тем не менее, в условиях $T \ll T_o$, где T_o – температура кипения данной жидкости, можно говорить о метастабильном (существующем ограниченное, но весьма длительное время), механическом равновесии или его отсутствии в слое жидкости с $\delta > 0$. Аналогичные соображения используются и в [8] при постановке задачи о свойствах капель на наклонной подложке.

Неоднородная часть деформации $\xi(x)$ определена уравнением

$$\alpha\xi'' + \rho g\xi + \frac{f}{(d+\xi)^3} - \frac{f}{d^3} = \text{const}, \quad (\xi')^2 < 1, \tag{4}$$

где α – поверхностное натяжение, ось z совпадает с направлением силы тяжести. Специальное выделение из const величины f/d^3 сделано ради удобства. Ограничение $(\xi')^2 < 1$ не принципиально и использовано ниже для упрощения выкладок. К тому же, как будет видно из дальнейшего, приближение малых градиентов имеет необходимую область применимости по параметру $\delta > 1$, достаточную для качественной ориентации в обсуждаемой задаче.

В линейном приближении $\xi/d \ll 1$ формула (4) сводится к

$$a^2\xi'' + \gamma\xi = a^2\lambda, \quad \gamma = 1 - 3f/\rho g d^4, \quad a^2 = \alpha/\rho g. \tag{5}$$

Поведение формулы (5) зависит от знака комбинации γ, что еще раз указывает на существование критической толщины d_* из определения (1).

В пределе $\gamma \to 1$ из (5) возникает задача Френкеля [8]. В этом формализме нет сил Ван-дер-Ваальса (при $f \to 0$ в определении $d(x)$ (2) автоматически выпадает постоянная часть d). Влияние подложки на свойства капли жидкости учитывается в [8] граничными условиями (заданием угла смачивания θ)

$$\xi(\pm l) = 0, \quad \xi'(\pm l) = \tan\theta, \quad \int_{-l}^{+l} \xi(x)dx = S, \tag{6}$$

где $\pm l$ – точки соприкосновения профиля капли с подложкой.

Для висящей капли с нулевым углом смачивания

$$\xi(x) = \lambda a^2 + 2A\cos(x/a), \tag{7}$$

$$l = \pi a, \quad 2A = \lambda a^2, \quad 2\lambda a^2 l = S.$$

Здесь S – полный объем капли в расчете на единицу длины. Комбинация $\alpha\lambda$ имеет смысл давления в капле.

Полезно также определить энергию W капли Френкеля. С учетом (7) имеем

$$W = -\frac{\alpha}{2}\int_{-\pi a}^{+\pi a} [(\nabla\xi)^2 - \xi^2/a^2]dx = -\frac{\alpha}{2\pi a^3}S^2, \tag{8}$$

где S из (6). Отрицательный знак энергии W из формулы (8) нуждается в комментариях. Начнем с нормировки (6), означающей, что весь жидкий материал собран в одну каплю. Но задача (5), (6) допускает и альтернативную постановку: полный объем жидкости может распределяться между несколькими (для простоты одинаковыми) каплями. Пусть число этих капель равно N, каждая из них имеет массу S/N, а суммарная энергия W_* возникающего комплекса равна

$$W_* = NW_N, \quad W_N = -\frac{\alpha}{2\pi a^3}(S/N)^2, \quad W_* \propto N^{-1}, \quad |W_*| < |W|. \tag{8a}$$

Если энергии (8), (8а) положительны, то при фиксированном S каплям выгодно дробиться, образуя в пределе однородную пленку жидкости. Такое поведение характерно для капель с нулевым углом смачивания на твердой подложке. Этот вывод содержится и в [8]. Но в инверсионном случае процесс дробления, ведущий к образованию однородной пленки, противоестественен (однородная инверсионная пленка макротолщины абсолютно неустойчива). Для устранения парадокса имеется одна возможность – энергии W в (8), W_* в (8а) в инверсионном случае должны быть отрицательными (по отношению к аналогичным энергиям на подложке), что и зафиксировано в (8). Тогда, согласно (8а), вместо дробления каплям Френкеля энергетически выгодно объединяться, нормировка (6) на одну каплю становится оправданной, а развитие событий приобретает наглядный смысл: в задаче о трансформации N капель в одну при заданном S одиночная капля имеет самый "низкий" центр тяжести по отношению к потолку.

2. Перейдем к задаче о реконструкции. В терминах $z(x) = d(x)/d_*$ первый интеграл уравнения (4) равен

$$(z')^2 = p(z) + \text{const}, \quad p(z) = \kappa^2 d_*^2[-z^2 + 1/(3z^2) + \Lambda z], \quad \Lambda = a^2\lambda/d^*, \quad \kappa^2 = a^{-2}. \tag{9}$$

Условие периодичности функции $z(x)$

$$(z_{max} + z_{min}) + (z_{max} + z_{min})/3z_{max}^2 z_{min}^2 - \Lambda = 0 \tag{10}$$

связывает между собой экстремальные точки неоднородной границы жидкости. При заданном Λ и z_{max} уравнение (10) является алгебраическим (третьей степени) относительно z_{min}. Анализ корней этого уравнения совместно с требованием (2) приводит к заключению о невозможности солитонного решения интересующей нас задачи (формально этот случай содержится в (10) и отвечает стремлению периода к бесконечности). Опуская громоздкие общие детали этого доказательства, заметим, что в пределе $\delta \ll 1$ возможное солитонное решение задачи ведет к связи

$$z(x) = 1 + \xi(x), \quad 2\xi_{min} = -\xi_{max}, \tag{11}$$

и должно описывать одиночный холм высоты $1 + \xi_{max} > 0$, плавно переходящий в асимптотики (11) при удалении от его вершины. Именно такое решение желательно обнаружить в задаче о реконструкции, чтобы обосновать граничные условия (6) из [8] для висящей капли. Но солитонное решение (11) противоречит требованию нормировки (2) при произвольной длине L . Это утверждение справедливо и в общем случае не малых δ.

В отсутствие солитонов сохраняется альтернатива: реконструкция пленки периодична либо возникает апериодичный (но и не солитонный) вариант деформации пленки. Первое предположение не проходит, во всяком случае для массивной пленки, когда реконструкция ведет к образованию системы капель Френкеля (7). Для независимой группы капель их слияние энергетически выгодно (см. (8а)), но не обязательно. Если же речь идет о системе капель, связанных между собой жидкими перемычками, то ситуация меняется. Энергетические стимулы и неизбежные флуктуации в размерах капель ведут к гидродинамическому росту больших капель за счет своих меньших соседей. Этот процесс развивается сравнительно медленно (в меру пропускной способности тонких ван-дер-ваальсовских перемычек между каплями), и потому использование понятия капли особенно удобно на последних стадиях укрупнения. Со временем все промежуточные капли "съедаются" одной из них, имеющей исходно самые большие размеры. Перераспределение жидкости по различным каплям напоминает задачу о коалесценции в системе пор, обменивающихся вакансиями [9].

Учитывая невозможность образования естественного солитона (11) и качественные соображения о неустойчивости периодической системы капель, остается предположить, что деформация потерявшей устойчивость инверсионной пленки жидкости развивается вплоть до образования одиночного холма (принудительного солитона) с профилем $z(x)$ и характерными точками $z_{\min}$, $z_{\max}$, следующими из определений

$$\int_{z_{max}}^{z(\zeta)} \frac{d\xi}{\sqrt{p(\xi) - p(z_{max})}} = \zeta, \quad \zeta = \frac{x}{d_*}, \quad \int_{z_{max}}^{z_{min}} \frac{d\xi}{\sqrt{p(\xi) - p(z_{max})}} = \frac{L}{d_*}. \qquad (12)$$

Здесь определения $p(z)$ дано в (9), величины z_{max} и z_{min} связаны формулой (10), а параметр Λ определен дополнительным требованием (2).

Заключение (12) о появлении одиночного холма в ходе реконструкции инверсионной жидкой пленки качественно подтверждается экспериментами [1].

Некоторые аналитические оценки, позволяющие ориентироваться в характеристиках задачи, возникают для относительно малых значений L, когда $L \geq a$ и $\delta \gg 1$. При этом можно использовать эффективную теорию возмущений по параметру δ^{-1}.

В нулевом приближении основная часть жидкости находится в гравитационной части деформированной пленки (то есть в областях с толщиной $d > d_*$) с профилем $z(x)$ Френкеля (7), сдвинутом от нуля на величину z^o_{min}. Таким образом, сразу же готовы определения z^o_{max}, Λ^o:

$$z^o_{max} = \Lambda^o - z^o_{min}, \quad \Lambda^o = 2(\delta + 1), \quad \delta \gg 1. \qquad (13)$$

Следующий шаг – оценка с помощью (10) величины z^o_{min}. Здесь, собственно, и возникает качественное различие между задачей Френкеля и более последовательным рассмотрением, включающем силы Ван-дер-Ваальса. При известных z^o_{max}, Λ^o (см. (13)), а также с учетом $z^o_{min} \ll 1$, имеем из (10)

$$(z^o_{min})^3 \simeq 1/3z^o_{max} \quad \text{или} \quad (d^o_{min})^3 \simeq d_*^4/3d^o_{max}. \qquad (14)$$

Располагая этим определением z^o_{min}, нетрудно продолжить уточнения, а также оценить область применимости предлагаемой теории возмущений. Она верна, если

$$(L - \pi a)d^o_{min} \ll \pi a d^o_{max}. \qquad (15)$$

В области $L > \pi a$ требование (15) легко осуществимо в меру $z^o_{min} \ll z^o_{max}$, что в свою очередь имеет место, когда $\delta \gg 1$.

Обсудим здесь же реальность предположения $\xi' < 1$ из (4). Это требование верно, если

$$\xi_{max} < \pi a \quad \text{или} \quad Ld_*(\delta + 1) < \pi^2 a^2, \qquad (16)$$

где $\xi(x)$ определено в (7). В случае $d_* \ll a$ или, что то же, $\kappa d_* \ll 1$, имеется достаточная область $\delta > 1$, где условие (16), а значит, и уравнение (4) реализуются. Для гелия $\kappa^2 \simeq 397\,\mathrm{cm}^{-2}$. Что касается константы Ван-дер-Ваальса, то ее типичное значение для стеклянной подложки порядка $f \simeq 10^{-14}$ эрг. В результате величина d_* из (1) имеет масштаб $d_* \simeq 1.2 \cdot 10^{-4}$ см, а комбинация $\kappa d_* \simeq 2.5 \cdot 10^{-3}$, то есть необходимая для (16) малость $\kappa d_* \ll 1$ действительно имеется.

Таким образом, в работе обсуждается гравитационная неустойчивость инверсионной пленки жидкости и возможность ее стационарной реконструкции. Показано (в одномерном приближении), что реконструкция возможна и носит апериодичный характер.

Отметим также, что порог устойчивости инверсионной пленки легко сдвигается внешним электрическим полем, которое без труда вводится в задачу (пленка между пластинами конденсатора). Развитие такого сценария может остановить утечку сверхтекучего гелия по стенкам дюара. При его изучении могут оказаться полезными известные результаты [10 – 17] о динамике гравитационно неустойчивого жидкого слоя.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант # 98-02-16640) и INTAS Network (грант # 97-1643).

---

1. А.Левченко, Г.Колмаков, Л.Межов-Деглин и др., ФНТ **25**, 333 (1999).
2. Л.П.Горьков, Д.М.Черникова, Письма в ЖЭТФ **18**, 119 (1973).
3. Д.М.Черникова, ФНТ **2**, 1374 (1976).
4. А.П.Володин, М.С.Хайкин, В.С.Эдельман, Письма в ЖЭТФ **26**, 707 (1977).
5. Л.П.Горьков, Д.М.Черникова, ДАН СССР **228**, 829 (1976).
6. В.И.Мельников, С.В.Мешков, ЖЭТФ **82**, 191 (1982).
7. P.Leiderer and M.Wanner, Phys. Lett. **A73**, 189 (1979).
8. Я.Френкель, ЖЭТФ **18**, 659 (1948).
9. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Физическая кинетика*, М.: Наука, 1979.
10. R.Bellman and R.Pennington, Quart. J.Appl. Math. **12**, 151 (1954).
11. N.Rajappa, Acta Mechanica, **10**, 193 (1970).
12. N.Rajappa, J. Phys. Soc. Jap. **28**, 219 (1970).
13. E.Ott, Phys. Rev. Lett. **29**, 1429 (1972).
14. D.Book and E.Ott, Phys. Fluids **17**, 676 (1974).
15. Э.Сон, Письма в ЖТФ **4**, 1023 (1978).
16. В.Иевлев, Теплофизика высоких температур **18**, 769 (1980).
17. Н.Иногамов, А.Демьянов, Э.Сон, *Гидродинамика перемешивания*, М.: Изд. МФТИ, 1999, параграф 10.