

## НЕЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ДИНАМИКА И КОНКУРЕНЦИЯ КВАЗИЗАХВАЧЕННЫХ СОСТОЯНИЙ В $N$ -АТОМНОМ МИКРОМАЗЕРЕ

Г.П.Мирошниченко<sup>1)</sup>, И.П.Вадейко, А.В.Рыбин<sup>+</sup>, Ю.Тимонен<sup>+2)</sup>

Санкт-Петербургский институт точной механики и оптики  
197101 Санкт-Петербург, Россия

<sup>+</sup> University of Jyväskylä, Department of Physics, Jyväskylä, Finland

Поступила в редакцию 4 сентября 2000 г.

После переработки 27 октября 2000 г.

Изучены закономерности переходного процесса для редуцированной матрицы плотности (РМП) квантовой моды микромазера, накачиваемого пакетами из  $N$  двухуровневых атомов. Найдено, что динамика РМП состоит из быстрой и медленной стадий. Иерархия временных масштабов объясняется структурой спектра оператора развития РМП, имеющего группы собственных чисел, близких к нулю и к единице. Показано, что удобным базисом для описания быстрой стадии является набор собственных и присоединенных векторов жордановых ячеек, связанных с вырожденным нулевым собственным числом. Динамика присоединенного вектора в зависимости от числа пролетевших кластеров неэкспоненциальна. Один присоединенный вектор скачкообразно переходит в соседний при пролете очередного кластера. Медленная фаза динамики контролируется квазизахваченными состояниями поля (КЗС). КЗС являются обобщением захваченных состояний идеальной одноатомной модели и представимы в виде линейных комбинаций долгоживущих собственных векторов оператора эволюции с близкими к единице собственными числами. Важная особенность КЗС – их устойчивость по отношению к флуктуациям числа атомов в кластерах и к величине скорости релаксации поля.

PACS: 42.50.-p

Значительный технологический прогресс в области резонаторной электродинамики [1] позволил создать новый физический прибор – микромазер на ридберговских атомах [2]. Наибольшее внимание в литературе обращено на стандартную одноатомную модель [3 – 6], когда в резонаторе в любой момент времени присутствует не более одного атома. Основными допущениями теории являются: классическая траектория движения атомного центра масс, являющаяся следствием его большой кинетической энергии  $E_{kin}$ ; пренебрежение релаксацией поля за время атомно-полевого взаимодействия вследствие высокой добротности резонатора  $Q$ ; пренебрежение спонтанной релаксацией атомов, оправданное большим временем жизни ридберговских состояний по сравнению с длительностью атомно-полевого взаимодействия  $\tau$  и большой константой взаимодействия  $g$ , определяемой значительным дипольным моментом этих состояний. Релаксация поля учитывается в моменты, когда резонатор пуст. Аналитическое представление данных допущений следующее:

$$R\tau \ll 1, \quad \tau\gamma \ll 1, \quad g\tau \geq 1, \quad E_{kin} \gg \hbar\omega, \quad (1)$$

где  $R[c^{-1}]$  – плотность атомного потока, который в рассматриваемом случае характеризуется пуассоновским распределением интервалов между  $N$ -атомными пакетами,

<sup>1)</sup> e-mail: mirosh@mkk.ifmo.ru

<sup>2)</sup> J.Timonen.

а  $\gamma^{-1} = Q/\omega$  – время жизни фотона в резонаторе. Кроме того, обычно пренебрегают неоднородностью внутррезонаторного поля.

Нашей задачей является изучение переходных процессов установления поля в  $N$ -атомном обобщении идеальной одноатомной модели, введенном в работе [7]. Периодическая последовательность пакетов из  $N$  атомов каждый, возбуждаемых вспомогательным лазером на ридберговские уровни, пропускается сквозь резонатор. Если объем кластера  $V$  принять достаточно малым по сравнению с длиной волны  $\lambda$  собственной моды резонатора, то есть  $V \approx (0.01 \cdot \lambda)^3$ , то можно использовать приближение постоянного поля вдоль пакета. Для стандартной частоты моды  $\omega = 20$  ГГц (см. [2]) и около 10 атомов в пакете необходимая плотность возбужденных атомов должна быть равна  $10^4 \text{ см}^{-3}$ . В соответствие с простыми оценками не существует принципиальных сложностей для приготовления такой плотности возбужденных атомов. Например, при поперечном сечении поглощения атомов в основном состоянии  $\sigma \sim 10^{-16} \text{ см}^2$ , перетяжке вспомогательного лазера  $\varpi \sim 30$  мкм [8], эффективности возбуждения около 1% и начальной плотности потока  $\sim 10^8 \text{ см}^{-3}$  необходим лазер с величиной интенсивности порядка  $1 \text{ кВт/см}^2$  и длительностью импульса  $\tau_{ex} = 0.01 \cdot \lambda/v_{at} \sim 1$  мкс, где  $v_{at} \approx 300$  м/с есть средняя скорость атомов в потоке.

$N$ -атомная модель описывается гамильтонианом [9]

$$H = H_0 + V = \omega \left( a^\dagger a + S_3 + \frac{N}{2} \right) + g (a^\dagger S_- + a S_+), \quad (2)$$

где  $S_3, S_\pm$  – генераторы  $SU(2)$  алгебры [10], и  $a, a^\dagger$  – операторы рождения и уничтожения полевой моды резонатора,  $\hbar = 1$ . Обозначим через  $\mathcal{W}(N, \tau)$  оператор эволюции редуцированной матрицы плотности (РМП). Если до влета нового кластера в резонатор поле определяется матрицей плотности  $\rho_f(t)$ , тогда после вылета пакета оно принимает форму

$$\rho_f(t + \tau) = \mathcal{W}(N, \tau) \cdot \rho_f(t) = S p_{at} \{ e^{-iH\tau} \cdot \rho_{at} \otimes \rho_f(t) \cdot e^{iH\tau} \}. \quad (3)$$

Релаксация поля описывается стандартным оператором Лиувилля  $\mathcal{L}$  [3, 5]. Следуя формализму Филиповича [3] для периодической накачки микромазера пуассоновским потоком атомных пакетов, можно построить весь супероператор эволюции РМП:

$$S(N) = \mathcal{Q}(N_{ex}) \cdot \mathcal{W}(N, \tau) = (1 - \mathcal{L}/N_{ex})^{-1} \cdot \mathcal{W}(N, \tau). \quad (4)$$

В работе [11] показано важное свойство динамики редуцированной матрицы плотности поля микромазера – свойство *диагональной инвариантности*. При наличии некоторого интеграла движения каждая диагональ РМП развивается независимо от других матричных элементов РМП. Это обеспечивает значительное упрощение вычислений.

В данной работе изучается статистика фотонов в резонаторе, прокачиваемом пакетами полностью возбужденных атомов. При наличии диагональной инвариантности достаточно исследовать динамику лишь центральной диагонали РМП – функции распределения числа фотонов. Для этого удобно ввести линейное векторное пространство, в котором центральная диагональ изображается вектор-столбцом  $\rho_n^{(t)}$ , а оператор развития – матрицей. В данном пространстве будем называть *фоковским* вектор, имеющий только один ненулевой элемент, равный единице и представляющий матрицу плотности чистого фоковского состояния.

Для рассмотрения динамики заселенности чисел фотонов вводится вектор потока вероятности:

$$J_n^{(l)} = \sum_{n'=0}^{n-1} \sum_{n''=n}^{\infty} \left( -S(N)_{n'n''} \rho_{n''}^{(l)} + S(N)_{n''n'} \rho_{n'}^{(l)} \right), \quad (5)$$

где  $\rho^{(l)}$  – центральная диагональ  $\rho_f$  после пролета  $l$  кластеров. Число  $l$  играет в данной задаче роль дискретного времени. Вектор  $J^{(l)}$  имеет значение доли заселенности, “прошедшей” через  $n$ -е фоковское состояние, и позволяет оценить скорость изменения интегральной вероятности в интервале  $[n_0, n_1]$  после пролета  $l$ -го кластера:

$$J_{n_0}^{(l)} - J_{n_1}^{(l)} = \sum_{n'=n_0}^{n_1-1} \left( \rho_{n'}^{(l)} - \rho_{n'}^{(l-1)} \right). \quad (6)$$

Как показали численные исследования, переходный процесс возбуждения микромазера пролетающими многоатомными кластерами имеет быструю и медленную фазы по отношению к дискретному времени  $l$ . Начальное распределение, занимающее достаточно широкую область фоковских чисел, за несколько первых пролетов разбивается на узкие пики, локализованные в строго определенных областях чисел фотонов, далее называемых *областями квазизахвата*. Заселенность фоковских состояний из промежуточных областей, далее называемых *нулевыми зонами*, быстро перебрасывается в области квазизахвата. Затем наступает квазистационарный режим, в процессе которого динамика имеет вид медленного перетекания заселенности между разными областями квазизахвата в сторону больших фоковских чисел.

Быстрая и медленная фазы представлены на графике зависимости изменения интегральной вероятности в областях квазизахвата за один пролет от числа пролетевших кластеров (см. рис.1). Характер переходного процесса объясняется специфичной

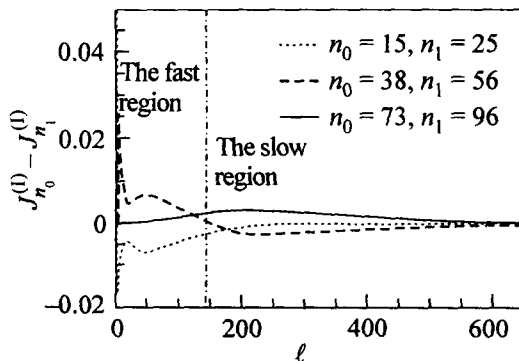


Рис.1. Динамика скорости изменения интегральной вероятности (см. (6)) в трех последовательных областях квазизахвата для начального когерентного состояния поля со средним числом фотонов, равным 16. Число атомов в пакете  $N = 5$

структурой оператора эволюции (3). Матрица  $\mathcal{W}$  имеет нижнетреугольную форму и ее спектр совпадает со множеством диагональных элементов. Естественно пронумеровать собственные числа (и векторы) фоковским числом  $n$  в порядке их расположения на диагонали  $\mathcal{W}$ . Множество собственных значений содержит две важные области: близкую к единице и нулевую. Точки, близкие к единице, расположены в областях квазизахвата, а нулевые зоны заполнены числами, близкими к нулю. Из рис.2 видно, что с ростом числа атомов в кластере спектр меняется несущественно в области единицы, но число нулевых точек возрастает. Такое поведение объясняется уменьшением числа промежуточных собственных значений, поэтому для больших  $N$

спектр содержит большие зоны нулей и сравнительно малое число близких к единице точек. Очевидно, что быстрая фаза переходного процесса по дискретному времени  $l$  связана с нулевыми зонами спектра. Из-за близости спектра к вырождению для описания динамики естественно выбрать базис нулевого приближения, который будем строить, приравняв к нулю все диагональные элементы  $\mathcal{W}$  в нулевых зонах. Анализ показывает, что в этом случае матрица  $\mathcal{W}$  содержит ячейки Жордана, а базис собственных векторов каждой зоны оказывается неполным. В этом можно убедиться от противного, так как в случае полноты существуют линейные комбинации элементов базиса, имеющие единственную компоненту, расположенную в нулевой зоне. Но такие линейные комбинации могут быть собственными, только когда матрица  $\mathcal{W}$  содержит полностью нулевой блок, на диагонали которого размещается рассматриваемая зона нулей. В нашем случае такие блоки отсутствуют, потому что  $\mathcal{W}$  стохастичен, обладает ленточной нижнетреугольной формой и ширина уже второй зоны нулей становится больше, чем число атомов.

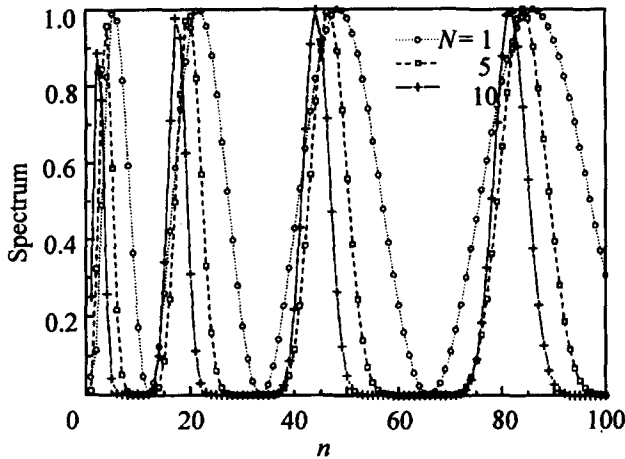


Рис.2. Спектр  $\mathcal{W}(N)$  для  $N = 1, 5, 10$

В данной работе отметим некоторые особенности динамической картины, связанные с включением в базис присоединенных векторов. Динамика собственного вектора определяется дискретной экспонентой, то есть показательной функцией  $\lambda^l$ , где  $\lambda$  – собственное число данного вектора. Динамика присоединенного вектора неэкспоненциальна, так как оператор развития переводит один присоединенный вектор в другой из той же ячейки Жордана. Наличие этих векторов объясняет быстрый перенос заселенности через нулевые зоны, скорость которого ограничена числом атомов в пакете. В противном случае динамика, описываемая собственными векторами с собственными значениями, равными нулю, имела бы вид моментального переноса заселенности через нулевую зону, что противоречит упомянутому ограничению. Интересно заметить, что предельная скорость накачки, равная  $N$  фотонов за один пролет  $N$ -атомного кластера, достижима в центре нулевой зоны.

Медленная фаза развития поля, называемая квазистационаром, связана с собственными векторами, соответствующими близким к единице собственным значениям. В одноатомной модели микроазера известны так называемые захваченные состояния [12]. Это нераспадающиеся состояния, представимые в виде фоковского

вектора, номер  $n$  ненулевой компоненты которого удовлетворяет условию захвата:

$$\sqrt{n+1} = \frac{\pi\chi}{g\tau}, \quad \chi = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Это же условие оценивает положение центров областей квазизахвата в многоатомной модели (см. рис.2). По аналогии с одноатомным случаем введем понятие квазизахваченного состояния (КЗС). Данным состоянием будем называть локализованную в фоковском базисе линейную комбинацию собственных векторов с собственными значениями, близкими и равными единице. Области локализации и являются области квазизахвата.

Следует отметить, что концепция микромазера, накачиваемого  $N$ -атомными кластерами, обсуждалась ранее в работе [7]. Здесь основное внимание было обращено на стационарное состояние. В работах [13] отмечено, что различные флуктуации в системе и релаксация поля разрушают точные захваченные состояния, обнаруженные в идеальной одноатомной модели. В данной работе мы хотим подчеркнуть две особенности оператора эволюции РМП, касающиеся КЗС. Первая особенность заключается в том, что близкие к единице собственные значения и соответствующие им собственные векторы гораздо более устойчивы к релаксации для большего числа атомов в кластере, поэтому квазистационар имеет форму макроскопической суперпозиции КЗС с существенно субпуассоновской шириной каждого пика и устойчив к внешним потерям. Вторая особенность состоит в слабой зависимости местоположения центров КЗС от числа  $N$  атомов в кластере (см. рис.2). Это позволяет сделать важный вывод, что форма квазистационарного состояния поля устойчива к флуктуациям числа атомов в кластере. Этот результат подтверждается графиком рис.3, где дано сравнение квазистационарных распределений, полученных с учетом

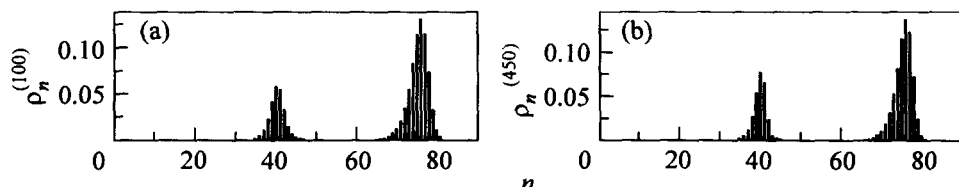


Рис.3. Функция распределения числа фотонов для  $N_{ex} = 50$  и  $n_b = 0.054$ . В начальный момент поле в тепловом равновесии с резервуаром. (а): среднее число атомов в кластере 15, число пролетевших кластеров равно 100. Статистика атомного распределения в кластере гауссова со среднеквадратичным отклонением 3 атомов. (б): в кластере точно  $N = 15$ , число пролетов 450

разброса числа атомов в кластере (рис.3а), и для фиксированного числа атомов в пакете (рис.3б). В расчетах выбрана гауссова функция распределения со средним числом атомов 15 и среднеквадратичным отклонением, равным 3. Наличие разброса приводит к уменьшению времени жизни КЗС, что выражается в виде ускорения перехода от одного квазистационарного состояния к следующему. На графиках данный факт отражается в различии числа итераций  $l$ , необходимых для достижения заданного распределения. Важно отметить, что ширина и положение КЗС остаются практически без изменений по сравнению с идеальным случаем. Из перечисленного выше следует, что  $N$ -атомный микромазер может быть использован как генератор стабильного субпуассоновского излучения.

В заключение мы хотим отметить, что данная работа позволила обнаружить ряд физических эффектов, которые либо были слабо выражены в одноатомной модели,

либо вообще отсутствовали. Предлагаемый подход обобщает базовую модель одноатомного микроазера и представляется реалистичным для экспериментальной реализации. В работе отмечается важность участков спектра, близких к нулю, ответственных за быстротечные процессы, и участков спектра, близких к единице, связанных с квазизахваченными состояниями, которые определяют состояния квазиравновесия.

- 
1. S.Haroche and D.Kleppner, *Phys. Today* **42**(1), 24 (1989).
  2. D.Meschede, H.Walther, and G. Müller, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 551 (1985); G.Rempe, M.Scully, and H.Walther, *Physica Scripta* **34**, 5 (1991); G.M. Brune, J.Raimond, P.Goy et al., *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1899 (1987).
  3. P.Filipowicz, L.Javanainen, and P.Meystre, *Phys. Rev.* **A34**, 3077 (1986).
  4. P.Meystre and M.Sargent III, *Elements of Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
  5. P.Elmfors, B.Lautrup, and B.Shagerstam, *Phys. Rev.* **A54**, 5171 (1996).
  6. P.Meystre, G.Rempe, and H.Walther, *Opt. Lett.* **13**, 1078 (1988).
  7. G.D'Ariano, N.Sterpi, and A.Zuchetti, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 900 (1995).
  8. K.An, J.J.Childs, R.R.Dasari, and M.S.Feld, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3375 (1994).
  9. M.Tavis and E.Cummings, *Phys. Rev.* **170**, 379 (1968); M.Scully, G.Meyer, and H.Walther, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4144 (1996).
  10. A.Rybin, G.Kastelewicz, J.Timonen, and N.Bogoliubov, *J. Phys. A: Gen. and Math.* **31**, 4705 (1998).
  11. I.Vadeiko, G.Miroshnichenko, A.Rybin, and J.Timonen, *Optics and Spectr.* **89**, 300 (2000).
  12. P.Filipowicz, J.Javanainen, and P.Meystre, *J. Opt. Soc. Am.* **B3**, 906 (1986); P.Meystre, G.Rempe, and H.Walther, *Opt. Lett.* **13**, 1078 (1988); O.Benson, G.Raithel, and H.Walther, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3506 (1994); M.Weidinger, B.T.H.Varcoe, R.Heerlein, and H.Walther, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3795 (1999).
  13. M.Orszag, R.Ramirez, J.Retamal, and C.Saavedra, *Phys. Rev.* **A49**, 2933 (1994); L.Ladron, M.Orszag, and R.Ramirez, *Phys. Rev.* **A55**, 2471 (1997); M.Kolobov and F.Haake, *Phys. Rev.* **A55**, 3033 (1997).