

## СВЕРХУЗКИЕ ОПТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ В КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

А.В.Пименов, А.П.Сухоруков, Л.Торнер\*<sup>1)</sup>

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова  
119899 Москва, Россия

\* *Universitat Politecnica de Catalunya, Department of Signal Theory and Communications  
Barcelona, ES 08034, Spain*

Поступила в редакцию 16 октября 2000 г.

Решены векторные уравнения Максвелла для планарных волновых пучков первой и второй гармоник с учетом нелинейной дифракции, которая приводит к ослаблению квадратичной нелинейности. Рассчитана структура поперечных и продольных компонент электромагнитного поля параметрического солитона при разных значениях волнового вектора и фазовой расстройки. Найдены точные аналитические выражения для автомоделных профилей предельно узких солитонов и показано, что ширина имеет фундаментальный предел порядка длины волны в линейной среде.

PACS: 42.65.-k

Целью настоящей работы является разработка теории пространственных параметрических солитонов, ширина которых сравнима с длиной волны излучения. Параметрические солитоны как результат трехволнового взаимодействия, предсказанные в [1], после экспериментального доказательства их существования в оптике [2] широко исследуются в последние годы [3–6]. Переход к захвату сверхузких солитонов позволяет достичь предельно высокой степени локализации энергии. До последнего времени теория пространственных солитонов разрабатывалась главным образом для широких пучков в рамках нелинейных уравнений Шредингера. Для описания свойств узких волновых пучков требуется иной подход, основанный на строгом решении уравнений Максвелла. Подобное рассмотрение выполнено при анализе дифракции в средах с кубичной нелинейностью в [7–9] и совсем недавно начато в случае захвата сверхузких пучков в параметрический солитон на квадратичной нелинейности. Так, в [10] проанализировано взаимодействие двумерных локализованных волн первой и второй гармоник, векторы поляризации которых лежат в плоскости дифракции, и показано, что учет продольных компонент приводит к эффекту нелинейной дифракции, ослабляющему параметрическое самовоздействие. В данной работе исследуется другой тип взаимодействия: обыкновенной волны первой гармоники и необыкновенной волны второй гармоники, причем нелинейную дифракцию испытывает только первая гармоника. Помимо численных расчетов, нами найдены точные аналитические выражения для фундаментального предела ширины и автомоделных профилей всех компонент параметрического солитона. Выявлено, что при переходе от параксиальных пучков к сверхузким меняется вид дисперсии и одновременно включается механизм ослабления нелинейной связи пучков.

---

<sup>1)</sup> L.Torner.

Рассмотрим двумерную дифракцию в плоскости ( $YZ$ ) двух волн, распространяющихся вдоль оси  $Z$  и электрическое поле которых представимо в виде

$$\mathbf{E}_j = \frac{1}{2} \sum \mathbf{E}_j(y, z) \exp(i\omega_j t) + \text{к.с.},$$

где  $\omega_j$  – частота,  $\omega_2 = 2\omega_1$  ( $j = 1, 2$ ). Из уравнений Максвелла следует, что при дифракции ТЕ-поляризованной волны поперечная составляющая электрического поля  $E_{jx}$ , ориентированная перпендикулярно плоскости дифракции, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 E_{jx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{jx}}{\partial z^2} + \frac{\omega_j^2}{c^2} D_{jx} = 0, \quad (1a)$$

а поперечная компонента вектора электрической индукции  $D_{jy}$ , расположенная в плоскости дифракции (ТМ-волна) – уравнению

$$\frac{1}{\varepsilon_{j1}} \frac{\partial^2 D_{jy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D_{jy}}{\partial z^2} + \frac{\omega_j^2}{c^2} D_{jy} = 0, \quad (1b)$$

где  $\varepsilon_{j1}$  – диэлектрическая проницаемость в линейной среде. Векторы электрической индукции связаны с электрическими полями через тензор квадратичной восприимчивости следующим образом:

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E}_1 + 4\pi \hat{\chi}_2 \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2, \quad (2a)$$

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 + 2\pi \hat{\chi}_2 \mathbf{E}_1^2. \quad (2b)$$

В (1b) входит вторая производная индукции  $D_j$  (2), содержащей нелинейную часть. Поэтому в общем случае дифракция волн становится нелинейной, что проявляется для сверхузких пучков.

Рассмотрим распространение локализованных волн при взаимодействии в кристалле, главная оптическая ось которого ( $X$ ) ориентирована перпендикулярно плоскости волновода. Будем искать решения для пространственных солитонов – стационарных пучков с плоскими фазовыми фронтами,

$$\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_j(y) \exp(-ik_j z), \quad (3)$$

при выполнении фазового синхронизма для нелинейных волновых векторов  $k_2 = 2k_1$ . После подстановки (3) в (1) сделаем замену  $E_1 = D_1 / (\varepsilon_1 + 4\pi \chi_2 E_2)$ , чтобы эффект нелинейной дифракции перенести в слагаемые, описывающие ослабление взаимодействия. В результате находим следующие уравнения для огибающих параметрического солитона:

$$\frac{d^2 u}{dY^2} - u + \frac{uv}{1 + bv} = 0, \quad \frac{d^2 v}{dY^2} - \alpha v + \frac{u^2}{2(1 + bv)^2} = 0, \quad (4)$$

где  $u = 8\pi \sqrt{(1-b)\chi_2} D_{1x} / b\varepsilon_1^2$  – нормированная индукция электрического поля основной волны,  $v = 4\pi \chi_2 E_{2y} / b\varepsilon_1$  – нормированная напряженность электрического поля волны второй гармоники,  $Y = y k_{11} \sqrt{b/(1-b)}$  – безразмерная поперечная координата,  $k_{j1} = \sqrt{\varepsilon_{j1}} \omega / c$  – волновое число в линейной среде,  $\alpha = (4k_1^2 - k_{21}^2) / (k_1^2 - k_{11}^2)$  – параметр относительной фазовой расстройки (при линейном фазовом синхронизме)

$k_{21} = 2k_{11}$  и  $\alpha = 4$ ),  $b = 1 - k_{11}^2/k_1^2$  – параметр, ответственный как за нелинейную фазовую отстройку, так и за эффект ослабления (насыщения) взаимодействия ( $b > 0$ ). Система уравнений (4) имеет гамильтониан

$$H = (du/dY)^2 + (dv/dY)^2 - u^2 - \alpha v^2 + u^2 v / (1 + bv).$$

В отсутствие резонанса с линейными волнами ( $\alpha > 0$ ) по аналогии со случаем малой интенсивности [1] будем искать решение (4) для светлых солитонов с симметричными колоколообразными профилями. Хотя такие решения можно получить только численно, из условия фокусирующего самовоздействия  $u, v > 0$ , свойства симметрии  $u'(0) = v'(0) = 0$  и отрицательности кривизны профилей в вершинах  $u''(0) = v''(0) < 0$  при учете  $H = 0$  можно найти аналитическую оценку для максимумов амплитуд  $u_m = u(0)$ ,  $v_m = v(0)$ :

$$1 < (1 - b)v_m < 4(3b + \sqrt{1 + 8b}) / (1 + 12b + \sqrt{1 + 8b}),$$

$$u_m = v_m \sqrt{\alpha(1 + bv_m)} / [v_m(1 - b) - 1]. \quad (5)$$

Из (5) видно, что солитон может существовать при условии  $b = 1 - k_{11}^2/k_1^2 < 1$ . Это означает увеличение длины волнового вектора  $k_1 > k_{11}$  и, следовательно, замедление солитона по сравнению с линейной волной. При уменьшении ширины пучка волновое число  $k_1$  растет и  $b \rightarrow 1$ . Для широких пучков с  $b \ll 1$  имеем  $1 < v_m < 2$  и  $u_m > \sqrt{2\alpha}$  [6], а для предельно узких  $-1 < (1 - b)v_m < 3/2$  и  $u_m > \sqrt{27\alpha/4}(1 - b)^{-3/2}$ .

Переход в (4) к параксиальной теории для слабых полей широких пучков осуществляется, если положить  $b \ll 1$ . При этом становится незначительным эффект насыщения, так как, согласно (5),  $bv_m \ll 1$ , то есть  $4\pi\chi_2 E_{2y} \ll \epsilon_1$ ,  $D_{1x} \approx \epsilon_1 E_{1x}$ , и упрощается дисперсия солитонов вследствие малого нелинейного изменения волновых векторов:  $k_j^2 - k_{ji}^2 \cong 2k_{ji}(k_j - k_{ji})$ ,  $k_1 \cong k_{11}(1 + b/2)$ ,  $\alpha \cong 2(2k_1 - k_{21}) / (k_1 - k_{11})$ . В таком приближении уравнения (4) приобретают стандартный вид для огибающих пространственных квадратичных солитонов [1]. В частности, профили широких солитонов имеют вид  $u = \sqrt{2}v = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{sech}^2(Y/2)$  при  $\alpha = 1$  [1]. Численно свойства таких солитонов были проанализированы в [5, 6].

В сильных полях с  $4\pi\chi_2 E_{2x} \geq \epsilon_1$  нелинейность среды ослабевает – включается своеобразный механизм насыщения. Поэтому узкие пучки обладают другими свойствами, чем широкие. Рассмотрим режим сильного насыщения  $bv_m \gg 1$ , имеющий место, согласно (5), с параметром  $b \rightarrow 1$ . Тогда для ядра солитона уравнения (4) преобразуются к виду

$$u'' + (1 - b)u - u/v = 0, \quad (6a)$$

$$v'' - \alpha v + u^2/2v^2 = 0. \quad (6б)$$

Будем искать асимптотические решения при  $(1 - b) \rightarrow 0$  в автомодельной форме. В первом приближении по малому параметру уравнение (6б) заменяется алгебраическим соотношением  $2\alpha v^3 = u^2$  (аналогично случаю каскадной нелинейности), после чего уравнение (6а) легко решается и мы находим аналитические выражения для ядра предельно узкого солитона, локализованного в области  $|k_{11}y| < 3\pi/2$ :

$$u = u_m \cos^3(k_{11}y/3), \quad v = v_m \cos^2(k_{11}y/3), \quad (7)$$

где максимумы амплитуд  $u_m = (1 - b)^{-3/2}(27\alpha/4)^{1/2}$ ,  $v_m = \frac{3}{2}(1 - b)^{-1}$ , а  $k_{11}y = Y(1 - b)^{1/2}b^{-1/2}$ . Интересно отметить, что предельные профили и их ширины не

зависят от параметра фазовой расстройки  $\alpha$ , величина которого при  $b \rightarrow 1$  стремится к 4. В ядре солитона при  $|k_{11}y| < 3\pi/2$  нормированные поперечные компоненты электрического поля основной гармоники имеют огибающие  $E_{1y} = (u_m/v_m) \cos(k_{1y}y/3)$ ,  $H_{1z} = n_{11}(1-b)^{-1/2}E_{1y}$ . Из уравнений Максвелла можно вычислить все другие компоненты в виде  $E_{1z} = iu_m\epsilon_1^{-1} \cos^2(k_{1y}y/3) \sin(k_{1y}y/3)$ ,  $H_{2y} = n_{21}(1-b)^{-1/2}E_{2z}$ ,  $H_{2z} = in_{11}u_m \sin(2k_{1y}y/3)$ . Огибающие поперечных компонент имеют колоколообразную форму, а продольных – двугорбую; магнитные поля значительно превышают электрические.

Из (7) нетрудно найти следующие фундаментальные величины предельно достижимых ширин солитонов по уровню  $e^{-1}$  амплитуды электрического поля:

$$w_1 = 6k_{11}^{-1} \arccos(e^{-1}) \approx 1.14\lambda_{11}, \quad w_2 = 6k_{11}^{-1} \arccos(e^{-1/2}) \approx 0.878\lambda_{11}. \quad (8)$$

Таким образом, фундаментальный предел полной ширины пространственного параметрического солитона (8) порядка длины волны в линейной среде.

Полная система уравнений (4) была решена нами численно методом релаксации [11] при фазовом синхронизме ( $\alpha = 4$ ) и изменении нормированного волнового числа солитона  $k_1/k_{11}$  от 1 до 10, что соответствует варьированию параметра насыщения  $b$  в пределах  $0 \div 0.99$ . На рис.1 изображены профили поперечных и продольных компонент электрического поля предельно узкого солитона, рассчитанные

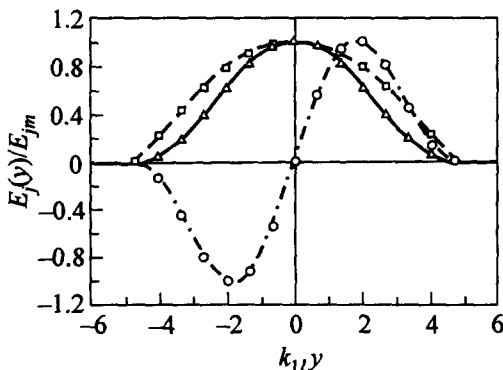


Рис.1. Распределение электрического поля в поперечном сечении предельно узкого квадратичного солитона с параметрами  $\alpha = 4$ ,  $b = 0.99$ : поперечной  $E_{1y}$  (сплошная кривая) и продольной  $E_{1z}$  (штрих-пунктир) компонент основной волны, поперечной компоненты  $E_{2x}$  (штриховая) второй гармоники. Символами  $\Delta$ ,  $O$ ,  $\square$  обозначены значения амплитуд автомоделного профиля, рассчитанные по формулам (7)

численно при  $k_1/k_{11} = 10$  ( $b = 0.99$ ) и аналитически по формулам (7). Видно прекрасное совпадение этих профилей в ядре солитона. На рис.2 представлена закономерность уменьшения ширины солитона по мере увеличения волнового числа. На этом же рисунке слева тонкими линиями показаны поперечные размеры, найденные в рамках классической теории широких солитонов [1–6]. Расчет произведен при переходе к  $u = k_{11}(k_1 - k_{11})^{-1}(4\pi\chi_2 E_{1y}/\epsilon_1)$ ,  $v = k_{11}(k_1 - k_{11})^{-1}(2\pi\chi_2 E_{2z}/\epsilon_1)$ ,  $Y = y\sqrt{2k_{11}(k_1 - k_{11})}$  и  $b = 0$  в уравнениях (4), когда можно воспользоваться следующими выражениями для огибающих:  $u \approx 4.07\text{sech}^p(Y/p)$ ,  $v \approx 1.68\text{sech}^2(Y/p)$ , где  $p \approx 1.47$  [12]. Сравнение хода кривых на рис.2 показывает, что параксиальная теория широких пространственных квадратичных солитонов достаточно хорошо работает вплоть до  $k_1 \approx 1.12k_{11}$ , или  $b \approx 0.2$ , где ширина  $w \approx 1.5\lambda_1$ , а амплитуда  $E_{2zm} \approx 0.4\epsilon_2\chi_2^{-1}$ . В ходе дальнейшего сужения пучка включается механизм нелинейной дифракции и ширины стремятся к фундаментальным пределам (8), которые обозначены на рис.2 тонкими горизонтальными линиями. Минимальная ширина

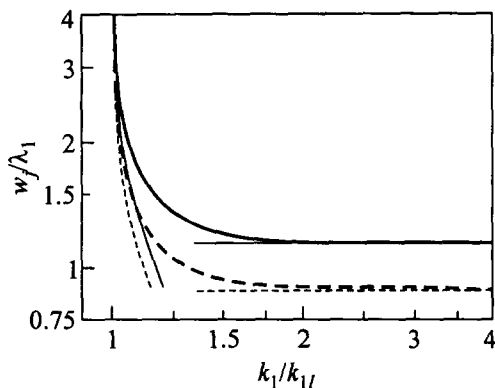


Рис.2. Нормированные на длину волны ширины огибающих поперечных компонент электрического поля основной волны солитона  $E_{1y}$  (сплошная кривая) и второй гармоники  $E_{2z}$  (штриховая) как функции нелинейного волнового числа при  $\alpha = 4$ . Тонкими линиями показаны асимптотики, соответствующие широким (слева) и предельно узким (справа) пучкам

практически устанавливается при  $k_1 \approx 2k_{1l}$ . Зависимости нормированных амплитуд поперечных и продольных компонент в вершине солитона от волнового числа представлены на рис.3. Заметное отклонение от парааксиального приближения (тонкие линии) начинается несколько позже, чем у ширины пучка (сравни с рис.2), а именно, при  $k_1 \approx 1.3k_{1l}$  или  $b \approx 0.4$ . Продольная компонента, пренебрежимо малая у широких пучков, монотонно растет по мере сужения солитона и становится больше поперечных при  $k_1/k_{1l} > 2.5$ .

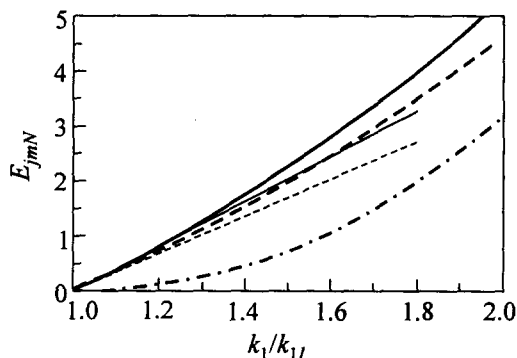


Рис.3. Зависимости нормированных пиковых амплитуд  $E_{jmn} = 4\pi\chi_2 E_{jm}/\epsilon_j$  трех компонент электрического поля квадратичного солитона от нелинейного волнового числа  $k_1/k_{1l}$  основной волны. Обозначения кривых те же, что на рис.2

В заключение отметим, что в работе развита теория предельно узких параметрических солитонов. Получены уравнения для огибающих поперечных и продольных компонент электрического и магнитного полей двух гармоник, учитывающие нелинейную дифракцию через введение ослабления взаимодействия. Рассчитаны профили солитона при разных значениях параметров фазовой расстройки и насыщения. Прослежен переход от парааксиального приближения к теории сверхузких пучков. Для предельно узких солитонов найдены точные аналитические решения асимптотических уравнений и получен фундаментальный предел ширины квадратичного солитона.

Работа частично поддержана грантами и проектами Российского фонда фундаментальных исследований # 99-02-18161, INTAS # 97-0581, программ "Ведущие научные школы" # 00-15-96561 и "Университеты России" # 99-2251.

1. Ю.Н.Карамзин, А.П. Сухоруков, Письма в ЖЭТФ 20, 734 (1974); ЖЭТФ 68, 834 (1975).

2. W.E.Torruellas, Z.Wang, D.J.Hagan et al., *Phys. Rev. Lett.* **74**, 5036 (1995); W.E.Torruellas, Z.Wang, L.Torner et al., *Opt. Lett.* **20**, 1949 (1995).
3. G.Stegeman, D.J.Hagan, and L.Torner, *Opt. Quantum Electron.* **28**, 1691 (1996); L.Torner, in *Beam Shaping and Control with Nonlinear Optics*, Eds. F.Kajzer and R.Reinisch, Plenum, New York, 1998, p. 229.
4. *Advanced Photonics with Second-order Nonlinear Processes*, Eds. A.D.Boardman, L.Pavlov, and S.Tanev, Kluwer, Dordrecht, 1998.
5. A.V.Buryak and Yu.S.Kivshar, *Phys. Lett.* **A197**, 407 (1995).
6. L.Torner, *Opt. Comm.* **114**, 136 (1995).
7. E.Granot, S.Sternklar, Y.Isby et al., *Opt. Lett.* **22**, 1290 (1997); *Opt. Comm.* **178**, 431 (2000).
8. В.Е.Семенов, Н.Н.Розанов, Н.В.Высотина, *ЖЭТФ* **116**, 458 (1999).
9. A.D.Boardman, K.Marinov, D.I.Pushkarov et al., *Opt. Quantum Electron.* **32**, 49 (2000).
10. A.D.Boardman, K.Marinov, D.I.Pushkarov et al., *Phys. Rev.* **E62**, 2871 (2000).
11. W.H.Press, B.P.Flannery, and S.A.Teukolsky, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
12. A.A.Sukhorukov, *Phys. Rev.* **E61**, 4530 (2000).