Письма в ЖЭТФ, том 72, вып.10, стр.753 - 757

"ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ" СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Л.Х.Ингель[1)]

Научно-производственное объединение "Тайфун"
249038 Обнинск, Калужская обл., Россия

Поступила в редакцию 12 октября 2000 г.

В "дважды неравновесных" жидких средах (например, в стратифицированных по температуре и концентрации примеси растворах в поле силы тяжести) возможны ситуации, когда добавление тепла приводит к понижению температуры среды, и наоборот. Это продемонстрировано на простом примере задачи конвекции.

PACS: 44.25.+f, 47.27.Te

В последние годы в геофизической литературе появились сообщения о некоторых парадоксальных экспериментальных результатах [1, 2]: "Показания спущенных в скважину (*в антиарктическом шельфовом леднике – Л.И.*) приборов выявили неожиданный парадокс: морская вода, находящаяся подо льдом, в зимний сезон обладает более высокой температурой, чем летом" [2]. Иными словами, в каком-то смысле можно говорить об отрицательной теплоемкости данной геофизической среды.

В настоящей заметке на простейшем примере конвекции в неравновесной стратифицированной среде показано, что подобные эффекты вполне возможны в случаях, когда вклады в плотностную стратификацию вносят как температура, так и концентрация примеси (соли), причем эти вклады имеют противоположные знаки.

Рассматриваем неограниченный объем раствора, плотность которого ρ в обычно используемом приближении [3 – 5] линейно зависит от температуры T и концентрации примеси s:

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0) + \beta(s - s_0)]. \qquad (1)$$

Здесь α – термический коэффициент расширения среды, β – соответствующий коэффициент для концентрации примеси (в океанологии его называют коэффициентом солености сжатия). Индексом нуль обозначены постоянные ("отсчетные") значения соответствующих величин. В простейших моделях стратифицированных сред предполагается, что температура, концентрация примеси и плотность среды линейно зависят от вертикальной координаты z (ось z направлена противоположно силе тяжести):

$$\bar{\rho}(z) = \rho_0[1 + (-\alpha\gamma_T + \beta\gamma_s)z], \qquad (2)$$

где постоянные градиенты[2)] $\gamma_T = d\bar{T}/dz$, $\gamma_s = d\bar{s}/dz$; чертой обозначены "фоновые" значения величин (для отличия от рассматриваемых ниже возмущений, связанных с тепловыделением).

[1)] e-mail: lingel@obninsk.com

[2)] Если градиенты γ_T и γ_s постоянны, то может возникнуть вопрос о неограниченном росте или убывании температуры, концентрации примеси и плотности среды при $z \to \pm\infty$. Эта формальная трудность несущественна, поскольку в реальных ситуациях речь, разумеется, идет о слоях среды конечной толщины.

Ограничиваемся здесь для простоты случаем, когда плотностная стратификация среды нейтральна (стратификации температуры и концентрации примеси компенсируют друг друга в поле плотности):

$$-\alpha\gamma_T + \beta\gamma_s = 0; \quad \bar{\rho}(z) = \rho_0 = \text{const}. \tag{3}$$

Кроме того, для целей настоящей работы достаточно исследовать конвекцию от источника тепла какого-либо простого вида. Рассмотрим мгновенный источник, равномерно распределенный вдоль вертикальной оси z:

$$Q(r,t) = Q_0\delta(r)\delta(t)/2\pi r, \tag{4}$$

где δ – символ дельта-функции, r – расстояние от оси z, Q_0 имеет смысл амплитуды источника. Поскольку источник не зависит от координаты z, будем искать и не зависящее от z решение. Обоснование и пределы применимости такого "одномерного режима" конвекции обсуждаются, например, в [6, 7].

Систему уравнений гидродинамики, переноса тепла и примеси рассматриваем в приближении, обычно используемом для задач конвекции, – в приближении Буссинеска или свободной конвекции [3–5]. В этом приближении пренебрегается сжимаемостью среды, но учитывается зависимость ее плотности от температуры и концентрации примеси. Уравнение неразрывности в этом приближении имеет вид $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$, где $\mathbf{v}$ – вектор скорости. Отсюда, в сочетании с $\partial/\partial z = 0$, следует отсутствие радиальных движений (перпендикулярных оси z). Тогда упомянутая система уравнений имеет вид (для однокомпонентной среды она более подробно выведена, например, в [7])

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla(\nu\nabla w) + g(\alpha T' - \beta s'), \tag{5}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \gamma_T w = \nabla(\kappa\nabla T') + Q, \tag{6}$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \gamma_s w = \nabla(\chi\nabla s'). \tag{7}$$

Здесь w – составляющая скорости вдоль оси z (другие компоненты скорости в данной задаче отсутствуют), t – время, штрихом обозначены отклонения от фонового состояния, описанного выше. Подчеркнем, что полная система уравнений гидротермодинамики и переноса примеси свелась к довольно простой системе (5)–(7) (линейной, если коэффициенты обмена ν, κ, χ не зависят от скорости и других неизвестных) только за счет симметрии задачи, без каких-либо предположений о малости амплитуд возмущений.

В качестве краевых условий предполагается, прежде всего, затухание возмущений вдали от источника (при $r \to \infty$). Кроме того, из соображений симметрии, при $t > 0$ имеем

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial T'}{\partial r} = \frac{\partial s'}{\partial r} = 0, \quad r = 0. \tag{8}$$

Поставленная задача особенно легко решается в случае постоянства и равенства между собой коэффициентов обмена для различных субстанций: $\nu = \kappa = \chi = K = \text{const}$ (это упрощение очень часто принимается в геофизических приложениях, когда речь идет об эффективных коэффициентах турбулентного обмена). Умножим уравнение (6) на α, (7) – на β и вычтем из первого второе. С учетом (3), получаем следующее уравнение для безразмерной плавучести $b = \alpha T' - \beta s'$:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{K}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial b}{\partial r} + \alpha Q. \tag{9}$$

Это – стандартное уравнение диффузии (теплопроводности), решение которого для мгновенного источника (4) имеет вид

$$b = \frac{\alpha Q_0}{4\pi K t}\exp(-r^2/4Kt). \tag{10}$$

Величина b, с точностью до множителя, является источником в уравнении (5). Решение последнего, как легко проверить, можно выразить в виде

$$w = gtb = \frac{\alpha g Q_0}{4\pi k}\exp(-r^2/4Kt). \tag{11}$$

Найдем теперь температурное возмущение. Уравнение (6) с учетом (11) можно переписать в виде

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{K}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial T'}{\partial r} - g\gamma_T tb + Q. \tag{12}$$

Решение этого уравнения можно представить в виде суммы двух слагаемых, соответствующих двум источникам в правой части (12). Одно из этих слагаемых соответствует источнику Q; это – хорошо известная функция Грина уравнения теплопроводности. Второй источник ($-g\gamma_T tb = -\gamma_T w$), как легко проверить, вносит в решение вклад, равный $-\frac{1}{2}g\gamma_T t^2 b = -\frac{1}{2}\gamma_T tw$. Итак, связанное с тепловыделением температурное возмущение имеет вид

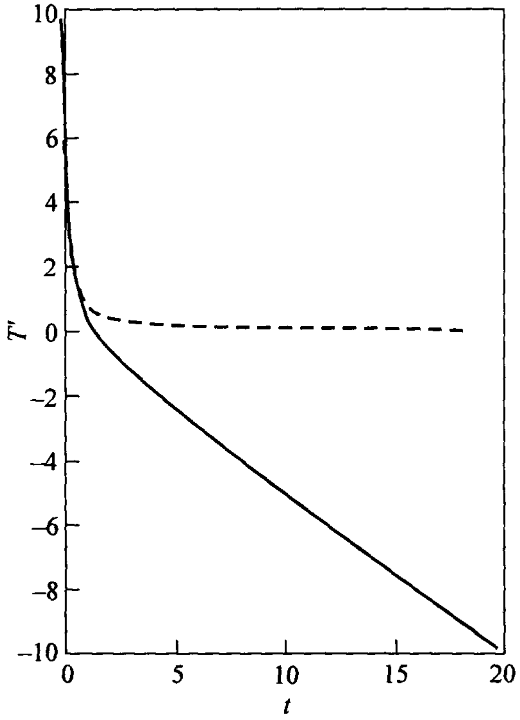
$$T' = \frac{Q_0}{4\pi K t}\exp(-r^2/4Kt) - \frac{1}{2}\frac{\alpha g\gamma_T t Q_0}{4\pi K}\exp(-r^2/4Kt) =$$
$$= \frac{Q_0}{4\pi K t}\exp(-r^2/4Kt)\left(1 - \frac{1}{2}\alpha\gamma_T t^2\right). \tag{13}$$

Аналогично можно найти и выражение для возмущения концентрации примеси (в нем содержится аналог только второго из двух слагаемых в (13)).

Первое слагаемое в (13) не нуждается в комментариях – это обычная диффузия тепла, выделившегося при $t = 0$ на оси z. Второе слагаемое описывает изменения температуры, связанные с адвекцией тепла – переносом тепла возникшими конвективными вертикальными движениями в стратифицированной среде. Особенность второго слагаемого, прежде всего, в том, что оно не затухает со временем по амплитуде (как первое), а усиливается. Нарастающий со временем отклик на сколь угодно малое начальное возмущение – признак неустойчивой системы. В этом смысле можно говорить о новом (видимо, не обсуждавшемся ранее) типе неустойчивости.

Другая особенность второго слагаемого в (13) заключается в том, что его знак может (при $\gamma_T > 0$) быть противоположным знаку первоначального тепловыделения.

На рисунке представлена зависимость от времени температурного возмущения на оси z при $\gamma_T > 0$. На малых временах преобладает первое слагаемое в (13) – имеет место обычное "диффузионное расплывание" выделившегося тепла. Но затем температурное возмущение меняет знак – в ответ на выделившееся тепло в системе нарастает отрицательное отклонение температуры (снизу поступает более холодная жидкость). В этом смысле можно говорить об эффективной отрицательной теплоемкости рассматриваемой среды.



Эволюция температурного возмущения на оси $r = 0$. Температура нормирована на $Q_0(\alpha g\gamma_T)^{1/2}/4\pi K$, время – на $(\alpha g\gamma_T)^{-1/2}$. Штриховой кривой схематически изображена аналогичная кривая в нестратифицированной среде

Рассмотренный выше пример задачи конвекции может показаться весьма специальным и искусственным (рассматривается источник тепла бесконечной длины в неограниченной среде). Но такой пример использован здесь лишь для простоты и получения точного аналитического решения. Легко убедиться, что в "дважды неравновесных" средах (стратифицированных как по температуре, так и по концентрации примеси) подобные результаты можно получить и для других хорошо известных форм конвекции. Например, модели конвективных струй и "термиков", описанные в монографии [4], нетрудно обобщить на случай бинарной смеси, когда, помимо температурной стратификации, стратификация плотности определяется и вертикальным ходом концентрации примеси. В простейшем случае, когда суммарная плотностная стратификация нейтральна, а температурная – устойчива, для струй и термиков легко получить результаты, аналогичные приведенным выше. Действительно, объем среды, получивший дополнительное тепло, очевидно, всплывает. При этом вполне возможны ситуации, когда он становится холоднее окружающей среды (поскольку переносит вверх более холодную жидкость), но продолжает при этом всплывать (за счет вклада в плавучесть отрицательного возмущения концентрации примеси). Таким образом, в ответ на полученное жидкой системой дополнительное тепло, в ней нарастает отрицательное отклонение температуры! Результат физически объяснимый, но, в то же время, в какой-то степени неожиданный.

1. K.W.Nickols, Nature **388**, 460 (1997).
2. Б.И.Силкин, Метеорология и гидрология 4, 127 (1998).
3. Г.З.Гершуни, Е.М.Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, М.: Наука, 1972.
4. Дж.Тернер, *Эффекты плавучести в жидкостях*, М.: Мир, 1977. (J.S.Terner, *Buoyancy effects in fluids*, University Press, Cambridge, 1973.)
5. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986.
6. Б.Гебхарт, Й.Джалурия, Р.Махаджан, Б.Саммакия, *Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен*, т.1, М.: Мир, 1991, §7.2, с.435. (B.Gebhart, Y.Jaluria, R.Mahajan, and B.Sammakia, *Buoyancy-induced flows and transport*, Springer-Verlag, Berlin – Tokyo, 1988.)
7. Л.Х.Ингель, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана **26**, 794 (1990).