Письма в ЖЭТФ, том 72, вып.10, стр.758 - 773 © 2000г. 25 ноября

ВАРИАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ К ЗАДАЧАМ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ

В.И.Ильгисонис[1], *В.П.Пастухов*[1]

Институт ядерного синтеза
Российского научного центра "Курчатовский институт"
123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 октября 2000 г.

Развит вариационный метод исследования нелинейной динамики и устойчивости плазмы в рамках гидродинамических плазменных моделей: одножидкостной, холловской и электронной магнитных гидродинамик. Ключевой идеей метода является адекватный учет вариационных симметрий и соответствующих законов сохранения, присущих данным моделям. На их основе получены вариационные критерии устойчивости стационарно движущейся плазмы, а также предложен вариационный метод адиабатического разделения быстрых и медленных движений, позволяющий упрощать (редуцировать) исходные гидродинамические модели.

PACS: 52.30.-q, 52.55.Dy

1. Введение. Широкий круг процессов в замагниченной плазме может быть вполне адекватно описан в рамках тех или иных магнитогидродинамических (МГД) моделей. Так, например, уравнения идеальной одножидкостной МГД модели описывают стационарные состояния плазмы, ее макроскопическую динамику, а также широкий спектр колебаний и волн в плазме. При этом быстрые идеальные МГД неустойчивости, как правило, оказываются наиболее опасными и разрушительными как для лабораторной, так и для космической плазмы. Наряду с одножидкостной МГД моделью для более адекватного описания динамики плазмы привлекают также многокомпонентные модели, в частности, двужидкостные модели холловской (ХМГД) и электронной (ЭМГ) магнитных гидродинамик. Специфика ряда динамических задач, соответствующая наличию некоторого малого параметра, часто позволяет описывать их в рамках более простых редуцированных моделей.

Разнообразие МГД моделей и описываемых ими динамических процессов в плазме требует разработки достаточно общих и эффективных методов их теоретического анализа. При этом следует иметь в виду, что параметры высокотемпературной плазмы установок термоядерного синтеза и космической плазмы таковы, что характерные времена диссипативных процессов, связанных с кулоновскими столкновениями, существенно превышают характерные времена развития динамических процессов. В этом случае доминирующую роль должны играть динамические процессы, характерные для идеальной (бездиссипативной) модели, а диссипация будет отвечать за медленную эволюцию инвариантов "идеального" движения. Эта эволюция, вообще говоря, может включать и бифуркации динамического состояния системы.

Наиболее адекватными для анализа идеальных МГД моделей представляются методы лагранжевой механики непрерывных сред и, прежде всего, вариационные методы. Следует подчеркнуть, что применение вариационных методов при анализе идеальных МГД систем, вопреки довольно распространенному мнению, не ограни-

[1] e-mail: vil@nfi.kiae.ru; past@nfi.kiae.ru

чивается выводом интегральных критериев типа хорошо известного "энергетического принципа" [1], позволяющего исследовать линейную устойчивость статических равновесных состояний. Одним из наиболее важных шагов в исследовании лагранжевых систем (к которым относятся все идеальные МГД модели) является поиск вариационных симметрий, поскольку, согласно теореме Нетер, вариационной симметрии (то есть преобразованию независимых величин в лагранжиане, которое не меняет действия) соответствует определенный динамический закон сохранения. При этом априори вид закона сохранения и само его существование могут быть далеко не очевидны. Понятно, что наличие законов сохранения накладывает определенные ограничения на изменения физических величин, оказывая качественное влияние на устойчивость и нелинейную динамику системы в целом. Так, например, если система обладает симметрией перемаркировки (relabeling), то у нее наряду со статическими равновесиями есть динамические стационарные состояния с течениями. Поиску вариационных симметрий идейно очень близок вариационный метод адиабатического разделения быстрых и медленных движений в лагранжевых системах, который позволяет строить упоминавшиеся выше редуцированные МГД модели, автоматически сохраняющие вариационные симметрии исходной системы.

В наибольшей степени эффективность вариационных методов проявляется при анализе устойчивости сложных континуальных систем. В этом случае в полной мере может быть использован мощный аппарат теории устойчивости Ляпунова, который в отличие от "энергетического принципа" позволяет получить достаточные условия как линейной, так и нелинейной устойчивости и применим и к многокомпонентным моделям, и к исследованию устойчивости стационарных состояний с течениями. В последнем случае при построении функционала Ляпунова крайне важно постараться максимально учесть все законы сохранения, чтобы избежать излишней свободы в варьируемых функциях и получить достаточный критерий устойчивости, максимально близкий к необходимому, или даже необходимый и достаточный.

В настоящей работе дан краткий обзор недавних результатов, относящихся к использованию вариационных методов в задачах устойчивости и нелинейной динамики плазмы, описываемой различными идеальными МГД моделями. Основу обзора составляют оригинальные результаты, полученные в ходе выполнения проектов Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 97-02-17238 и # 97-02-17730). Разд.2 посвящен вариационным симметриям, краткому изложению формализма отыскания этих симметрий и соответствующих им законов сохранения. В разд.3 рассматриваются вариационные симметрии и законы сохранения, присущие наиболее известным МГД моделям. В разд.4 изложены основы вариационного метода адиабатического разделения быстрых и медленных движений в лагранжевых системах. Приложение метода иллюстрируется улучшенной версией редуцированных уравнений Кадомцева – Погуце – Страусса. В разд.5 представлены вариационные критерии устойчивости для рассматриваемых МГД моделей, разд.6 кратко суммирует основные результаты.

2. Вариационные симметрии. В данном разделе мы приводим формализм поиска вариационных симметрий при помощи теоремы Нетер. Краткость и несколько математизированный стиль изложения данного раздела вполне оправдывается тем, что соответствующий материал может быть найден в учебниках (например, [2, 3]). Для сокращения записи в этом разделе (и только в нем) x означает полный набор независимых переменных $\{x^i\}$, включающий время и пространственные координаты в неком объеме Г, $u = u(x)$ – зависимая вектор-функция, а нижний индекс отвечает дифференцированию по x. В вариации плотности лагранжиана $L = L(x, u, u_i, u_{ij}...)$ символ ∂ обозначает частную производную по соответствующему аргументу в отличие от полной производной d_i по независимой переменной x^i.

Рассмотрим инфинитезимальное преобразование u: $u(x) \to u(x) + \delta u$, приводящее к следующей вариации интеграла действия:

$$\delta S = \delta \int_\Gamma L\, dx = \int_\Gamma \delta L\, dx =$$

$$= \int_\Gamma (\frac{\partial L}{\partial u}\delta u + \frac{\partial L}{\partial u_i}\delta u_i + ...)\, dx = \int_\Gamma (E[L]\delta u + d_i(W^i[L]\delta u))dx. \qquad (1)$$

Здесь

$$E[L] = \frac{\partial L}{\partial u} - d_i\frac{\partial L}{\partial u_i} + d_i d_j\frac{\partial L}{\partial u_{ij}} - ... \qquad (2)$$

– так называемый оператор Эйлера, а поток в (1) определяется соотношением

$$W^i[L] = \frac{\partial L}{\partial u_i} - d_j\frac{\partial L}{\partial u_{ij}} + ...$$

До сих пор граничные условия не использовались.

Рассмотрим сначала вариации, обращающиеся в нуль на границе, $\delta u\Big|_{\partial\Gamma} = 0$. Тогда по принципу Гамильтона, согласно которому реальное движение доставляет экстремаль действию, мы получаем уравнения движения в виде

$$E[L] = 0. \qquad (3)$$

Теперь заметим, что если рассматриваемое преобразование является вариационной симметрией, то есть обеспечивает

$$\delta S + \int_\Gamma d_i\Lambda^i dx = 0, \qquad (4)$$

то на реальном движении выполняется закон сохранения

$$d_i(W^i[L]\delta u + La^i) = 0 \qquad (5)$$

(здесь учтено, что $E[d_i\Lambda^i] \equiv 0 \quad \forall\Lambda^i$). Это утверждение составляет содержание теоремы Нетер в формулировке Бойера и сразу следует из (1), (4). Заметим, что, следуя Бойеру [4], мы варьировали лишь зависимые функции $u(x)$. Важно также, что для любого закона сохранения существует по крайней мере одна вариационная симметрия, порождающая его в смысле Нетер [5]. Поскольку любая вариационная симметрия переводит движение в движение, то она определяет симметрию Ли – Бэклунда для уравнений Эйлера – Лагранжа $E[L] = 0$; обратное же верно не всегда. Таким образом, поиск вариационных симметрий можно вести лишь в классе симметрий Ли – Бэклунда, используя известную математическую технику.

Преобразование δu, зависящее от $x, u, u_{i_1}, u_{i_1 i_2}, ..., u_{i_1...i_n}$, определяет симметрию Ли – Бэклунда порядка n тогда и только тогда, когда

$$U^{(m)}E[L] \equiv 0 \qquad (6)$$

для любого u, *удовлетворяющего уравнению* (3). Здесь m – старший порядок производной функции u в операторе Эйлера (2), который рассматривается как функция от $x, u, u_{i_1}, u_{i_1 i_2}, ..., u_{i_1 \dots i_m}$; $U^{(m)}$ – расширенный инфинитезимальный генератор, равный по определению

$$U^{(m)} = \delta u \frac{\partial}{\partial u} + \delta u_i \frac{\partial}{\partial u_i} + ... + \delta u_{i_1 \dots i_m} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_m}},$$

где $\delta u_i = d_i \delta u, ..., \delta u_{i_1 \dots i_m} = d_{i_m} \delta u_{i_1 \dots i_{m-1}}$. Знак "$\equiv$" в уравнении (6) означает, что все коэффициенты перед $x, u, u_{i_1}, u_{i_1 i_2}, ...$ должны обращаться в нуль. В терминах расширенного инфинитезимального генератора вариационные симметрии удовлетворяют уравнению

$$U^{(m)} L + d_i \Lambda^i \equiv 0, \tag{7}$$

а искать их можно лишь среди решений уравнения (6).

Отметим, что уравнение (6) есть уравнение $E[L] = 0$, линеаризованное вблизи *произвольного движения.*

3. Гидродинамические модели и их симметрии. Построение лагранжиана конкретной системы гидродинамических уравнений является задачей не вполне тривиальной. Основная трудность обычно заключается в выборе адекватного набора переменных, которые можно было бы рассматривать как независимые. Физические переменные, входящие в искомую систему уравнений, таковыми не являются как раз из-за наличия уравнений, их связывающих.

В данной работе мы будем следовать эйлеровскому методу введения меток жидких элементов (лагранжевых координат). Мотивация этого вместе с кратким обзором других подходов к построению лагранжианов дана в [6]. Здесь лишь уместно отметить, что характерные для гидродинамики уравнения типа непрерывности, вмороженности и пр., представимые в виде $\partial_t \hat{T} + L_{\mathbf{v}} \hat{T} = 0$, где $\hat{T}$ – вмороженный объект, а $L_{\mathbf{v}}$ – производная Ли по полю $\mathbf{v}$, интегрируются в терминах лагранжевых координат, и лагранжиан строится лишь собственно для уравнения движения. Разумеется, в диссипативной системе такое интегрирование в общем случае не проходит, но если диссипация невелика, то структура гидродинамического движения определяется как раз "идеальным" лагранжианом, тогда как роль диссипации сводится к медленной эволюции квазиравновесных параметров системы и инвариантов "идеального" движения.

Формально лагранжева координатная сетка вводится тремя независимыми функциями $\{\alpha^i(t, \mathbf{r})\}: \quad J = \nabla \alpha^1 \cdot [\nabla \alpha^2 \times \nabla \alpha^3] \neq 0$, сносимыми жидкостью:

$$\partial_t \alpha^i + \mathbf{v} \boldsymbol{\nabla} \alpha^i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

Соответствующий контр- и ковариантный базисы определяются как

$$\mathbf{e}^i = \boldsymbol{\nabla} \alpha^i, \qquad \mathbf{e}_i = \frac{1}{2J} \epsilon_{imn} \mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n , \tag{9}$$

где ε_{imn} – единичный полностью антисимметричный тензор. Якобиан J удовлетворяет уравнению непрерывности $\partial_t J + \mathrm{div} J \mathbf{v} = 0$, поэтому если в начальный момент J нигде не обращается в нуль, то $J(t, \mathbf{r}) \neq 0$ для любого достаточно гладкого поля $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, то есть сетка остается невырожденной. Важно, что компоненты инвариантного тензора $\hat{T}$ в базисе (9) оказываются функциями лишь лагранжевых координат [6].

Динамика базисных векторов устанавливается непосредственно из определений (8), (9):

$$\partial_t \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{e}_i, \quad \partial_t \mathbf{e}^i = -\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}^i). \tag{10}$$

Введем искомое инфинитезимальное преобразование $\boldsymbol{\xi}$ независимых функций $\{\alpha^i(t,\mathbf{r})\}$ соотношением $\alpha^i \to \alpha^i + \delta\alpha^i$, $\delta\alpha^i = -\xi^i$, где $\boldsymbol{\xi} = \xi^i \mathbf{e}_i$. Вариации плотности ρ и энтропии η, описываемых обычными уравнениями непрерывности и адиабаты, а также вариация скорости есть

$$\delta\rho = -\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{\xi}), \quad \delta\eta = -\boldsymbol{\xi}\nabla\eta, \quad \delta\mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\xi}} + (\mathbf{v}\nabla)\boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi}\nabla)\mathbf{v}, \tag{11}$$

где точка эквивалентна $(\partial_t)\big|_{\mathbf{r}}$. Вид вариации электромагнитного поля зависит от типа гидродинамической модели.

Ниже будут получены вариационные симметрии и выражаемый через них явный вид законов сохранения для широко используемых гидродинамических моделей.

А. Одножидкостная магнитная гидродинамика подразумевает вмороженность магнитного поля $\mathbf{B}$, то есть

$$\partial_t \mathbf{B} = \mathrm{rot}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] \qquad (\mathrm{div}\mathbf{B} \equiv 0), \tag{12}$$

вариация которого

$$\delta\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,[\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}]\ . \tag{13}$$

Уравнение адиабаты $(\partial_t + (\mathbf{v}\nabla))\eta = 0$ часто записывается для энтропийной функции $s(\eta) = p/\rho^\gamma$, где γ – показатель адиабаты. Тогда, как известно [7], лагранжиан с плотностью

$$L = \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} - \frac{p}{\gamma-1} - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \tag{14}$$

описывает уравнение МГД движения

$$\rho\,\dot{\mathbf{v}} + \rho\,(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla p + [\mathbf{B}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B}] = 0. \tag{15}$$

Вводя вместо Λ^i временную и пространственные компоненты Λ^0, $\boldsymbol{\Lambda}$, условие существования вариационной симметрии (7) можно переписать явно, а именно, если существуют $\boldsymbol{\xi}, \Lambda^0, \boldsymbol{\Lambda}$, для которых

$$\partial_t\Lambda^0 + \mathrm{div}\boldsymbol{\Lambda} - \frac{v^2}{2}\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{\xi}) + \rho\mathbf{v}(\dot{\boldsymbol{\xi}} + (\mathbf{v}\nabla)\boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi}\nabla)\mathbf{v}) - \mathbf{B}\mathrm{rot}\,[\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{B}] + \frac{1}{\gamma-1}(\boldsymbol{\xi}\nabla p + \gamma p\ \mathrm{div}\boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{16}$$

при любых α^i, удовлетворяющих (15), то система МГД уравнений демонстрирует закон сохранения (5) в виде

$$\partial_t(\rho\boldsymbol{\xi}\mathbf{v} + \Lambda^0) + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}\mathbf{v})) + \mathrm{div}(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{B}^2 + \frac{\gamma p}{\gamma-1} - \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}\mathbf{B}) + \boldsymbol{\Lambda}) = 0. \tag{17}$$

Если дополнительно последний член в левой части равен $\mathrm{div}(\mathbf{v}\Lambda^0)$, то величина $(\Lambda^0 + \rho\boldsymbol{\xi}\mathbf{v})$ становится эйлеровым инвариантом (то есть $\sim J$ с коэффициентом, зависящим лишь от лагранжевых координат).

Нами были исследованы все симметрии Ли – Бэклунда первого порядка для уравнений одножидкостной МГД. Опуская довольно громоздкую процедуру их поиска, отметим, что, как оказалось, допустимые симметрии могут лишь линейно зависеть от производных координатных функций $\{\alpha^i\}$, то есть представимы в виде

$$\boldsymbol{\xi} \equiv \xi^i \mathbf{e}_i = \left[c^i_k \dot{\alpha}^k + c^{ij}_k \boldsymbol{\nabla}_j \alpha^k + \xi^{\star i}\right] \mathbf{e}_i, \tag{18}$$

где скаляры $c^i_k, c^{ij}_k, \xi^{\star i}$ зависят лишь от $(t, \mathbf{r}, \{\alpha^j\})$.

Как и следовало ожидать, в наборе симметрий имеются симметрии вариационные и масштабные скейлинги. Опуская последние, получим общий вид вариационных симметрий одножидкостной МГД:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi} = \left[b_0 v^i + (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \times \mathbf{r} + \mathbf{b}_3 t)\, \boldsymbol{\nabla}\alpha^i + \xi^{\star i}(\{\alpha^j\})\right] \mathbf{e}_i = \\ = b_0 \mathbf{v} + \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \times \mathbf{r} + \mathbf{b}_3 t + \boldsymbol{\xi}^{\star i}.\end{aligned} \tag{19}$$

Здесь b_0 – константа, $\mathbf{b}_1 \div \mathbf{b}_3$ – постоянные векторы. Особое внимание следует обратить на преобразование $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^\star$. Контравариантные компоненты $\xi^{\star i}$ зявисят только от меток жидких элементов, то есть описывают преобразование перемаркировки [8]. Выделенность этих преобразований состоит в невозмущении скорости. Нетрудно показать, что преобразования перемаркировки являются вариационными симметриями (то есть удовлетворяют (16)), если они одновременно не возмущают и магнитное поле, и плотность, и давление. Законы сохранения (17), отвечающие симметриям, параметризованным величинами b_0, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ в (19), описывают соответственно локальное сохранение энергии, компонент импульса и момента импульса:

$$\partial_t \left(\frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2\right) + \operatorname{div}\left\{\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \frac{\gamma \mathrm{p}}{\gamma - 1} + \mathbf{B}^2\right) - \mathbf{B}\,(\mathbf{v}\mathbf{B})\right\} = 0, \tag{20}$$

$$\partial_t \left[\rho(\mathbf{b}_1\mathbf{v})\right] + \operatorname{div}\left\{\rho\mathbf{v}(\mathbf{b}_1\mathbf{v}) + \mathbf{b}_1\left(\mathrm{p} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2\right) - \mathbf{B}(\mathbf{b}_1\mathbf{B})\right\} = 0, \tag{21}$$

$$\partial_t \left[\rho([\mathbf{b}_2 \times \mathbf{r}]\mathbf{v})\right] + \operatorname{div}\left\{\rho\mathbf{v}([\mathbf{b}_2 \times \mathbf{r}]\mathbf{v}) + [\mathbf{b}_2 \times \mathbf{r}]\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2\right) - \mathbf{B}([\mathbf{b}_2 \times \mathbf{r}]\mathbf{B})\right\} = 0. \tag{22}$$

Параметру $\mathbf{b}_3$ в (19) отвечает закон сохранения, который сводится к (21).

Симметрии перемаркировки отвечает закон сохранения

$$\partial_t(\rho\boldsymbol{\xi}^\star\mathbf{v}) + \operatorname{div}\left\{\rho\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}^\star\mathbf{v}) + \boldsymbol{\xi}^\star\left(\mathbf{B}^2 + \frac{\gamma\mathrm{p}}{\gamma - 1} - \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2}\right) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\xi}^\star\mathbf{B})\right\} = 0, \tag{23}$$

который, в отличие от распространенного мнения, является содержательным. Он определяет дополнительные – по сравнению с (20)–(22) – связи между физическими величинами и обуславливает существование и структуру стационарного движения. Его конкретный вид прямо связан с топологией магнитного поля, которая неизменна во времени в рамках идеальной МГД. Для магнитного поля общего положения он дает сохранение перекрестной спиральности

$$\partial_t(\mathbf{v}\mathbf{B}) + \operatorname{div}\left\{\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{B}) + \mathbf{B}\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{\mathrm{p}}{\rho} - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)\right\} = 0 \tag{24}$$

в предположении, что энтропия постоянна вдоль силовых линий магнитного поля. Для важного частного случая магнитного поля, образующего систему вложенных поверхностей $\psi = \text{const}$, дополнительно возникает закон сохранения

$$\partial_t(\mathbf{vD}) + \operatorname{div}\left\{\mathbf{v}(\mathbf{vD}) + \mathbf{D}\left(\frac{\mathbf{B}^2}{\rho} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) - \frac{\mathbf{B}}{\rho}(\mathbf{DB})\right\} = 0, \qquad (25)$$

где $\mathbf{D}$ – бездивергентный вектор, также подчиняющийся уравнению вмороженности (12) и касательный к поверхностям $\psi = \text{const}$, линейно независимый с $\mathbf{B}$. Построение $\mathbf{D}$ подробно описано в [9]. Закон сохранения (25) был открыт в [10], а затем независимо в [9], где он *использовался для вывода вариационного критерия устойчивости*.

Здесь необходимо отметить, что вариационные симметрии перемаркировки *по своему построению* задают структуру стационарных движений (течений) плазмы, так как они и только они не возмущают физические параметры системы, которые, следовательно, остаются стационарными и при конечном преобразовании такого типа. В частности, для системы вложенных магнитных поверхностей структура стационарных МГД течений имеет вид:

$$\mathbf{V} = \kappa(\psi)\mathbf{B}/\rho + \eta(\psi)\mathbf{D}/\rho, \qquad (26)$$

где κ, η - поверхностные функции, параметризующие течения (26).

Уравнения (20)–(23) исчерпывают законы сохранения одножидкостной МГД, отвечающие симметриям Ли-Бэклунда 1 порядка.

B. Холловская магнитная гидродинамика формируется теми же уравнениями непрерывности, движения и адиабаты, что и одножидкостная МГД. Отличие состоит в уравнении для магнитного поля: вместо (12) используется уравнение

$$\partial_t\mathbf{B} = \operatorname{rot}\left[(\mathbf{v} - \frac{1}{a\rho}\operatorname{rot}\mathbf{B}) \times \mathbf{B}\right], \qquad (27)$$

описывающее вмороженность магнитного поля в электронную компоненту плазмы ($\mathbf{v}_e = \mathbf{v} - \frac{1}{a\rho}\operatorname{rot}\mathbf{B}$), $a = e/m$ – удельный заряд ионов, нижний индекс e относится к электронным величинам. "Одножидкостные" по виду уравнения ХМГД есть частный случай двужидкостной гидродинамики с безынерционными ($m_e \to 0$) холодными ($p_e \to 0$) электронами, обеспечивающими просто квазинейтральный фон для ионов. В формальном пределе $a \to \infty$ ХМГД переходит в одножидкостную МГД.

Плотность *лагранжиана* ХМГД может быть записана в виде [6]

$$L_{\text{HMHD}} = \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} - \frac{p}{\gamma-1} + a\rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_e)\mathbf{A} - \frac{(\operatorname{rot}\mathbf{A})^2}{2}, \qquad (28)$$

где ρ, η заданы на ионной (8),(9), а векторный потенциал $\mathbf{A}: \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ – на электронной *лагранжевых* сетках:

$$\mathbf{A} = A_i(\{\alpha_e^j\})\mathbf{e}_e^i. \qquad (29)$$

Прямым дифференцированием можно убедиться, что ротор (29) действительно удовлетворяет уравнению (27).

Вариации электронных координат $\{\alpha_e^j\}$ не вполне независимы в силу условия квазинейтральности

$$a\rho + a_e\rho_e = 0, \qquad (30)$$

которое связывает электронное смещение с ионным:

$$a\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{\xi}) + a_e\mathrm{div}(\rho_e\boldsymbol{\xi}_e) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\xi}_e = \boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\rho}\mathrm{rot}\chi, \tag{31}$$

где χ – произвольный вектор.

Варьируя (28) по $\boldsymbol{\xi}$ и χ, получаем в качестве уравнений Эйлера искомые уравнения (15), (27). Если же существуют $\boldsymbol{\xi}$, χ, Λ^0, $\boldsymbol{\Lambda}$ такие, что выполнено условие вариационной симметрии $d_t\Lambda^0 + \mathrm{div}\boldsymbol{\Lambda} + \delta \mathrm{L}_{\mathrm{HMHD}} = 0$, то соответствующий им закон сохранения имеет вид

$$\begin{gathered}\partial_t(\rho\mathbf{v}\boldsymbol{\xi} - a\mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\chi + \Lambda^0) + \mathrm{div}\left\{\mathbf{v}(\rho\mathbf{v}\boldsymbol{\xi} - a\mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\chi) + \right.\\ + \mathrm{rot}\mathbf{B}\left(\mathbf{A}\cdot\left(\boldsymbol{\xi} + \frac{\mathrm{rot}\chi}{\rho}\right)\right) - \boldsymbol{\xi}\left(\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} - \frac{\gamma\mathbf{p}}{\gamma-1} + \mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{B}\right) + \\ \left. + \mathbf{B}\times\left[\left(\boldsymbol{\xi} + \frac{\mathrm{rot}\chi}{\rho}\right)\times\mathbf{B} - \boldsymbol{\nabla}\left(\mathbf{A}\cdot\left(\boldsymbol{\xi} + \frac{\mathrm{rot}\chi}{\rho}\right)\right)\right] + \boldsymbol{\Lambda}\right\} = 0.\end{gathered} \tag{32}$$

Понятно, что структура вариационных симметрий одножидкостной МГД сохранится и в ХМГД, однако, в принципе, могут появиться и иные, порождаемые дополнительной свободой в электронной компоненте. Рассмотрим, к примеру, преобразование

$$\chi = \chi^* = \chi_i^*(\{\alpha_e^j\})\mathbf{e}_e^i, \quad \boldsymbol{\xi} = 0, \quad \Lambda^i = 0. \tag{33}$$

Такое преобразование задает общую симметрию перемаркировки электронной жидкости и порождает закон сохранения, следующий из (32) в форме

$$\partial_t(\mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\chi^*) + \mathrm{div}\left((\mathbf{v} - \frac{1}{a\rho}\mathrm{rot}\mathbf{B})\mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\chi^*\right) = 0. \tag{34}$$

В частности, выбирая $\chi_i^* = A_i$, получаем сохранение магнитной спиральности $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$. Для любой перемаркировки (33) закон сохранения (34) выполняется автоматически и отражает лишь тот факт, что, как и следовало ожидать, $\mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\chi^*/\rho$ является пассивным скаляром. Тем самым закон сохранения (34) не является рестриктивным, когда векторный потенциал $\mathbf{A}$ уже записан в форме (29), в отличие от ионной перемаркировки, приводящей к нетривиальному закону сохранения

$$\partial_t(\rho\boldsymbol{\xi}^*\cdot\mathbf{u}) + \mathrm{div}\left[\rho\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}^*\cdot\mathbf{u}) - \rho\boldsymbol{\xi}^*(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - K)\right] = 0, \tag{35}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v} + a\mathbf{A}$, а $K = \mathbf{v}^2/2 + \gamma p/\rho(\gamma-1) + a\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}_e$ – функция Бернулли.

C. Электронная магнитная гидродинамика описывает другой предельный случай квазинейтрального движения на сравнительно коротких временах, когда можно пренебречь движением относительно тяжелых ионов по сравнению с движением быстрых электронов [11]. Уравнения ЭМГ могут быть получены из плотности лагранжиана

$$L_{\mathrm{EMHD}} = \frac{\rho_e\mathbf{v}_e^2}{2} - \frac{p_e}{\gamma_e - 1} + a_e\rho_e\mathbf{v}_e\cdot\mathbf{A} - \frac{(\mathrm{rot}\mathbf{A})^2}{2}$$

вариацией по $\mathbf{A}$ и по вектор-потенциалу χ смещения электронной жидкости, ограниченного условием квазинейтральности (30): так как ионы неподвижны, то $\partial_t\rho_e = 0$, $\mathrm{div}\rho_e\boldsymbol{\xi}_e = 0$ и

$$\boldsymbol{\xi}_e = \frac{1}{\rho_e}\mathrm{rot}\chi,$$

что отвечает (31) при $\boldsymbol{\xi} =$.

Следуя уже описанной процедуре, можно показать, что уравнения ЭМГ

$$a_e\rho_e\mathbf{v}_e = \mathrm{rot}\mathbf{B}, \tag{36}$$

$$\partial_t\mathbf{\Omega} = \mathrm{rot}[\mathbf{v}_e \times \mathbf{\Omega}] + \nabla T_e \times \nabla\eta_e, \tag{37}$$

где для краткости мы обозначили

$$\mathbf{\Omega} = \mathrm{rot}\mathbf{u}_e = \mathrm{rot}(\mathbf{v}_e + a_e\mathbf{A}), \quad T_e = p_e/\rho_e, \tag{38}$$

демонстрируют следующий закон сохранения:

$$\partial_t(\mathbf{u}_e\cdot\mathrm{rot}\chi)+\mathrm{div}\{\mathbf{v}_e(\mathbf{u}_e\cdot\mathrm{rot}\chi)+\mathbf{B}\times\delta\mathbf{A}+(\partial_t\mathbf{u}_e-\mathbf{v}_e\times\mathbf{\Omega}+\nabla(\mathbf{u}_e\mathbf{v}_e)-T_e\nabla\eta_e)\times\chi\} = \ . \tag{39}$$

Общие симметрии Ли – Бэклунда 1 порядка и вариационные симметрии ЭМГ этого класса были исследованы в [12]. Найдено, что допустимые смещения $\boldsymbol{\xi}_e$ и соответствующие им законы сохранения имеют такой же вид, что и для случая одножидкостной МГД (19), (2)-(22). Преобразование перемаркировки $\boldsymbol{\xi}_e = \boldsymbol{\xi}^\star_e$, $\delta\mathbf{A} =$ при $\boldsymbol{\xi}^\star_e\nabla\eta =$ является вариационной симметрией, порождающей закон сохранения

$$\partial_t(\mathbf{u}_e \cdot \mathrm{rot}\chi^\star_e) + \mathrm{div}\,(\mathbf{v}_e(\mathbf{u}_e \cdot \mathrm{rot}\chi^\star_e)) = \ . \tag{4 }$$

Условие (4) позволяет проинтегрировать две компоненты $\mathbf{u}_e$: $u_{2,3} = u^\star_{2,3}(\{\alpha^i_e\})$ (здесь α^1_e выбрана вдоль направления градиента энтропии η_e). В этом состоит важное упрощающее отличие ЭМГ от идеальной МГД, где такое локальное интегрирование не проходит [9].

Существенно, что все найденные в настоящем разделе симметрии относятся к числу точечных и контактных; в противном случае по теореме Ольвера [13] набор нетривиальных симметрий становится бесконечным, тогда как в нашем случае можно надеяться на отсутствие других симметрий и более высокого порядка.

4. Адиабатическое разделение движений и редуцированные МГД модели. В классической механике широко используется метод адиабатического разделения слабовзаимодействующих быстрых и медленных движений. Метод основан на выявлении устойчивых быстроосциллирующих степеней свободы исследуемой динамической системы. Характерный период колебаний быстрой степени свободы T_f должен удовлетворять условию $T_f/\tau_s \sim \varepsilon \ll 1$, где τ_s – характерное время изменения других степеней свободы. Далее для быстрой степени свободы строится адиабатический инвариант, то есть приближенный интеграл движения, сохраняющийся на временах, значительно превышающих характерное время медленной эволюции системы τ_s. Для описания такой медленной эволюции можно использовать адиабатические уравнения движения, которые получаются из исходной полной системы уравнений в предположении, что адиабатический инвариант является точным интегралом движения системы.

В работах [14, 15] был предложен метод адиабатического разделения движений для непрерывных сред. Метод базируется на аналогии с поиском вариационных симметрий перемаркировки. Кратко его суть состоит в следующем (более подробно логика метода изложена в [15]). Пусть в лагранжевой системе существуют движения с существенно различными характерными временами, отношение которых есть малый параметр $\varepsilon \ll 1$. Как правило, наличие параметра ε проявляется в том, что в возмущении потенциальной энергии присутствуют члены как порядка единицы, так и порядка ε^2, соответствующие структурно различным классам движений. По аналогии с процедурой поиска преобразования симметрии (разделы 2, 3) будем искать некоторое инфинитезимальное преобразование $\delta_a\alpha^i(\mathbf{r}, t)$, которое не изменяет лагранжиан системы как в главном порядке, так и в порядке ε, то есть удовлетворяет условию

$$\delta_a \int\limits_{\Gamma} L(\{\alpha^i\}, \{\partial_t\alpha^i\}, \{\nabla\alpha^i\}, \varepsilon)\, d^3\mathbf{r} = O(\varepsilon^2). \tag{41}$$

Если такое "адиабатическое" преобразование существует, то оно, как следует из разд.2, приближенно выполняет роль преобразования симметрии по отношению к быстрому движению, поскольку уравнения, описывающие динамику быстрого движения на временах, меньших τ_s, могут быть получены из принципа Гамильтона в пренебрежении членами порядка ε^2 в вариации лагранжиана.

Если функции $\delta_a\alpha^i$, удовлетворяющие условию (41), зависят только от обобщенных координат $\alpha^i(\mathbf{r}, t)$ и медленного времени (то есть $\delta_a\alpha^i = f^i(\{\alpha^j\}, \varepsilon t)$), то $\delta_a\alpha^i$ выполняют роль преобразования перемаркировки (см. разд.3), по отношению к быстрому движению. Продолжая аналогию с преобразованиями перемаркировки, введем некоторое адиабатическое поле обобщенных скоростей, имеющее ту же функциональную структуру, что и преобразование $\delta_a\alpha^i$. По отношению к быстрым движениям адиабатическое поле скоростей выполняет роль обсуждавшихся в разд.3 стационарных (нейтральных) течений.

Поскольку $\delta_a\alpha^i$ является частным подмножеством исходного множества произвольных вариаций обобщенных координат, то функции $\delta_a\alpha^i$ зависят от меньшего числа независимых "адиабатических" обобщенных координат. Для их определения требуется меньшее число уравнений, которые в отсутствии быстрого движения могут быть получены из принципа Гамильтона путем приравнивания нулю выражений при независимых вариациях "адиабатических" обобщенных координат в вариации действия (1) после подстановки в него $\delta\alpha^i = \delta_a\alpha^i$. Такие уравнения описывают динамику медленного движения в условиях, когда устойчивые быстрые движения не возбуждены. Поскольку преобразования симметрии, не меняющие лагранжиан исходной системы, являются подмножеством адиабатических преобразований $\delta_a\alpha^i$ по самому принципу построения последних, эти симметрии остаются симметриями и адиабатических уравнений движения. В частности, адиабатические уравнения допускают состояния со стационарными течениями, присущие исходным уравнениям движения. Важно подчеркнуть, что если быстрые движения не были возбуждены в начальный момент времени (что соответствует равному нулю адиабатическому инварианту быстрых движений) и остаются устойчивыми при развитии адиабатических течений, то эволюция системы будет приближенно идти в рамках адиабатических уравнений *сколь угодно долго*.

Данная процедура была применена в [14] для получения улучшенной (адиабатической) версии редуцированных уравнений Кадомцева – Погуце – Страусса [16–21], используемых для описания МГД динамики плазмы в токамаке. При типичной для токамаков величине $\beta \equiv 2p/B^2 \ll 1$ наиболее интересным динамическим процессам соответствуют возмущения, сильно вытянутые вдоль магнитного поля ($|\nabla_\parallel| \ll |\nabla_\perp|$) и имеющие характерные частоты $\omega \sim c_A \mid \nabla_\parallel \mid$ (c_A – скорость Альфвена), соответствующие альфвеновским волнам, или ниже. В таких процессах быстрые устойчивые магнитозвуковые (compressional Alfven) колебания с характерными частотами $\omega \sim c_A \mid \nabla_\perp \mid$ практически не возмущаются, что позволяет исключить их из рассмотрения с помощью предложенной процедуры адиабатического разделения движений. Роль малого параметра играет обратное аспектное отношение $\varepsilon = B_p/B_T \sim a/R$, где a и R – малый и большой радиусы тороидальной плазмы. Предполагается также, что для возмущенных величин $\mid \nabla_\parallel \mid \leq \varepsilon \mid \nabla_\perp \mid$, а $\beta \sim \varepsilon^2 a \mid \nabla_\perp \mid$.

Рассмотрим вариацию стандартного лагранжиана одножидкостной МГД модели (14). Согласно [14, 15], преобразование, уменьшающее доминирующие члены $\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{B}$ и $\rho\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v}$ в вариации лагранжиана до величины порядка ε^2, можно представить в виде инфинитезимального адиабатического смещения:

$$\boldsymbol{\xi}_a = \frac{1}{(\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta)}\left([\nabla\zeta \times \nabla\delta_a\alpha] - \mathbf{B}\,\delta_a\zeta\right), \tag{42}$$

где ζ *является псевдолагранжевой* функцией (то есть удовлетворяет уравнению $\partial_t\zeta + (\mathbf{v}-\mathbf{V})\cdot\nabla\zeta = 0$) и совпадает с тороидальным углом φ в стационарном состоянии, а $\delta_a\alpha$ и $\delta_a\zeta$ являются произвольными функциями псевдолагранженых координат и медленного времени. При этом остальные члены в вариации лагранжиана также имеют порядок ε^2. Таким образом, адиабатическое преобразование (42) приближенно выполняет роль преобразования перемаркировки по отношению к магнитозвуковым волнам. Адиабатическое поле скоростей, соответствующее преобразованию (42), может быть записано в виде

$$\mathbf{v}_a = \frac{1}{B^2}\left[\mathbf{B}\times\left(\nabla\phi - \nabla\zeta\,\frac{(\mathbf{B}\cdot\nabla\phi)}{(\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta)}\right)\right] + \mathbf{B}\,\frac{h_v}{B^2}, \tag{43}$$

где ϕ имеет смысл электрического потенциала, а h_v – перекрестная спиральность. Нетрудно видеть, что поле скоростей $\mathbf{v}_a$ включает в себя стационарные течения (26) ($\mathbf{v}_a = \mathbf{V}$ при $\phi = \phi_0(\psi)$ и $h_v = \mathbf{V}\cdot\mathbf{B}$).

Переход от исходной МГД модели к адиабатической соответствует замене произвольного поля скоростей адиабатическим (43). При этом уравнения вмороженности, непрерывности и адиабаты, которые должны выполняться при любом поле скоростей, сохраняют свой вид с точностью до замены $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}_a$. Наиболее сильно эта замена модифицирует уравнение вмороженности:

$$\partial_t\mathbf{B} = \left[\nabla\zeta \times \nabla\,\frac{(\mathbf{B}\cdot\nabla\phi)}{(\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta)}\right]. \tag{44}$$

Функции ϕ и h_v в выражении (43) определяются из адиабатических уравнений движения, получаемых из принципа Гамильтона. Зануление коэффициента при $\delta\zeta$ в вариации действия с учетом псевдолагранжевости $\rho/(\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta)$ и $p/\rho^\gamma = s(\psi)$ приводит к дифференциальному закону сохранения перекрестной спиральности:

$$\partial_t h_v + \operatorname{div}\left\{\mathbf{v}_a h_v - \mathbf{B}\left(\frac{{v_a}^2}{2} - \frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p}{\rho}\right)\right\} = 0, \tag{45}$$

который справедлив и для исходной нередуцированной МГД модели (см. уравнение (24)). Зануление коэффициента при $\delta\alpha$ дает второе динамическое уравнение адиабатической МГД модели, имеющее вид закона сохранения обобщенного импульса P_α, канонически сопряженного адиабатической координате α,

$$\partial_t P_\alpha + \operatorname{div}\left\{\mathbf{v}_a P_\alpha - \mathbf{B}\frac{\operatorname{div}[\mathbf{B}\times\nabla\zeta]}{(\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta)} - \frac{[\nabla\zeta\times\nabla p]}{(\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho}{(\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta)}\left[\nabla\zeta\times\nabla\frac{{v_a}^2}{2}\right] - \frac{\rho}{(\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta)}[\mathbf{v}_a\times\nabla(\mathbf{V}\cdot\nabla\zeta)]\right\} = 0, \tag{46}$$

$$P_\alpha = \operatorname{div}\left\{\frac{1}{{c_A}^2}\left(\nabla\phi - \nabla\zeta\frac{(\mathbf{B}\cdot\nabla\phi)}{(\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \mathbf{B}\frac{(\nabla\zeta\cdot\nabla\phi)}{(\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta)} + \mathbf{B}\frac{(\nabla\zeta)^2(\mathbf{B}\cdot\nabla\phi)}{(\mathbf{B}\cdot\nabla\zeta)^2}\right)\right\}.$$

Это уравнение также может быть получено как прямое следствие исходного векторного уравнения движения.

При решении конкретных задач, касающихся процессов, развивающихся на относительно коротких временных интервалах, в уравнениях (43)–(46) можно опустить ряд членов высокого порядка малости. Однако это следует делать достаточно аккуратно, чтобы не нарушить самосогласованность полученной системы уравнений и присущие ей симметрии. Пример такого упрощения приведен в работе [15]. Наряду с относительно универсальными малыми параметрами, такими, как отношение B_p/B_T в токамаке или как малость β, во многих плазменных задачах могут появляться дополнительные малые параметры, связанные, например, с близостью к границе МГД устойчивости. Наличие таких параметров также позволяет провести адиабатическое разделение движений. При этом роль медленных движений выполняют наиболее опасные моды, для которых, собственно, условие устойчивости и может быть нарушено. Примером подобных уравнений могут служить адиабатические уравнения для моделирования двумерной МГД конвекции плазмы вблизи порога желобковой неустойчивости в системах типа компактного тора, полученные в работе [15].

5. Вариационные принципы устойчивости. Общепринятый вариационный метод исследования устойчивости базируется на теории Ляпунова, основные трудности применения которой к сплошным средам связаны не только с построением самого функционала Ляпунова, но и с выбором адекватного набора независимых переменных, по которым должно производиться варьирование. В случае изолированных систем естественным "кандидатом в функционалы Ляпунова" может быть полная энергия (гамильтониан). Правильный же выбор вариационных переменных менее очевиден: физические величины, входящие в гамильтониан, обычно не вполне независимы в силу динамики. Их взаимосвязь может проявляться в соответствующих законах сохранения. Разумеется, даже в случае, когда набор варьируемых переменных неоправданно широк, мы получим достаточный критерий устойчивости по Ляпунову. Физически же он может быть малоинтересен, поскольку недоучет вышеупомянутых связей или пренебрежение ими могут привести как к сужению класса допустимых стационарных состояний, так и к "ужесточению" критерия устойчивости, т.е сделать его весьма далеким от необходимого или даже невыполнимым.

Примером сказанного может служить ситуация с идеальной МГД, в рамках которой устойчивость статических ($\mathbf{V} = 0$) равновесий плазмы может быть исследована с помощью "энергетического принципа" [1], дающего необходимый и достаточный критерий МГД устойчивости (доказательство необходимости см., например, в [22], доказательство справедливости этого критерия для нелинейного случая см. в [23]). Однако аналогичный подход оказался непродуктивным для стационарных состояний с течениями. Даже для линейной устойчивости критерий оказывается слишком "жестким" [24]: для течений с равновесной скоростью $\mathbf{V}$, непараллельной магнитному полю $\mathbf{B}$, он никогда не выполняется. Причина кроется в излишней свободе варьируемых функций, допускаемой в [24]: реальная динамика системы удовлетворяет определенным законам сохранения, которые должны быть учтены.

Довольно широко распространено мнение, что адекватный функционал Ляпунова может быть построен по схеме "гамильтониан + набор казимиров", см., например, [25]. Число казимиров для гидродинамических систем бесконечно, их можно нетривиальным образом размножать, поэтому на практике учитывают лишь небольшой набор, что, как отмечалось выше, зачастую приводит к малоинтересным результатам (см., например, [26], где ограничения возникают уже на равновесную конфигурацию). Вместе с тем, выбрав лагранжевые координаты в качестве независимых функций, можно автоматически учесть весь набор казимиров [6]. Содержательными законами сохранения остаются лишь те, которые "вовлечены в динамику" системы, в частности, отвечающие симметриям перемаркировки. Этим, в частности, схема "гамильтониан + набор казимиров" отличается от подхода Арнольда [27], учитывавшего сохранение спиральности в обычной гидродинамике, где такой закон сохранения является "динамическим". Для случая идеальной МГД таковыми являются законы (24), (25), учет которых [28, 9] позволил заметно улучшить критерий [24].

А. Вариационный критерий устойчивости для ХМГД. Применим эту логику для модели ХМГД. Закон сохранения (35) приводит к инвариантности интеграла

$$I = -\int d^3x\,\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{V}, \tag{47}$$

где $\mathbf{V}$ – скорость стационарного течения ионной компоненты (пока неопределенная), а $\mathbf{u} = \mathbf{v} + a\mathbf{A}$. Применяя преобразование Лежандра к лагранжиану (28) и используя (47), построим функционал Ляпунова

$$\mathcal{H} = \int d^3x\,\left(\frac{(\mathbf{P}+\mathbf{P}_e)^2}{2\rho} + \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}^2\frac{\mathbf{P}_e}{a\rho} + \frac{p}{\gamma-1}\right) + I, \tag{48}$$

где скорости выражены через канонические импульсы $\mathbf{P} = -\rho\mathbf{u}$, $\mathbf{P}_e = a\rho\mathbf{A}$.

Нетрудно видеть, что первая вариация (48) дает общие равновесия для ХМГД, а вторая минимизируется выбором $\delta\mathbf{P} = -\rho\delta(\mathbf{V} + a\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\delta\rho/\rho) + \delta\mathbf{P}_1$, где $\delta\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\xi})$ должна обеспечить выполнение (35) в вариациях. В результате имеем критерий устойчивости [29]

$$\delta^2\mathcal{H} = \delta^2\mathcal{H}_{\mathrm{MHD}} + \delta^2\mathcal{H}_1, \tag{49}$$

где

$$\delta^2\mathcal{H}_{\mathrm{MHD}} = \int d^3x\,\Big\{\delta\mathbf{B}^2 + \delta\mathbf{B}\cdot[\mathrm{rot}\,\mathbf{B}\times\boldsymbol{\xi}] + \frac{\delta\mathbf{P}_1^2}{\rho} - \rho(\delta\mathbf{V})^2 + [\delta(\rho\mathbf{V})\times\boldsymbol{\xi}]\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{V} + \tag{50}$$

$$+\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla\frac{V^2}{2}\,\delta\rho + (\boldsymbol{\xi}\nabla p)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\xi} + \gamma p\,\mathrm{div}^2\boldsymbol{\xi}\Big\},$$

$$\delta^2\mathcal{H}_1 = \int d^3x\,\left\{\delta\mathbf{B}\cdot[\mathrm{rot}\chi\times\mathbf{V}] - \frac{\mathrm{rot}\chi\times\mathbf{B}}{\rho}\cdot\delta(\rho\mathbf{V}) + \mathbf{V}_e\cdot[\mathrm{rot}\chi\times\mathbf{B}]\frac{\delta\rho}{\rho}\right\}. \tag{51}$$

Напомним, что здесь $\delta\rho = -\mathrm{div}\,\rho\boldsymbol{\xi}$, $\delta\mathbf{V} = (\mathbf{V}\nabla)\boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{\xi}\nabla)\mathbf{V}$ и $\delta\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\delta\mathbf{A} = \mathrm{rot}\,\delta(\mathbf{P}_e/a\rho)$; величины $\boldsymbol{\xi}$, χ – независимые вариационные переменные. Полные пространственные дивергенции здесь для простоты опущены с тем, чтобы получить наиболее важную "объемную" часть критерия.

Единственное отличие выражения (50) от соответствующего выражения для идеальной МГД [9] состоит в том, что $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,[\boldsymbol{\xi}_e \times \mathbf{B}]$ и, следовательно, также зависит от χ. Случай одножидкостной МГД соответствует пределу $\mathbf{V}_e \to \mathbf{V}$, $\mathrm{rot}\chi \to 0$, $\delta^2\mathcal{H}_1 \to 0$. Возможный выбор $\delta\mathbf{P}_1$ подробно обсуждался в [9]; случай $\delta\mathbf{P}_1 = 0$ отвечает критерию [24].

В. Вариационный критерий устойчивости для ЭМГ для баротропы $T_e = T_e(\eta)$ (а ниже для простоты мы будем рассматривать только этот случай, позволяющий проинтегрировать все 3 компоненты $\mathbf{u}_e$, так как последний член в (36) при этом выпадает) может быть получен из функционала Ляпунова

$$H_e = \int d^3x \left\{ \frac{\rho \mathbf{v}_e^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right\} = \int d^3x \left\{ \frac{\rho a_e^2}{2} (\mathbf{A}_u - \mathbf{A})^2 + \frac{\mathrm{rot}^2 \mathbf{A})}{2} \right\}, \tag{52}$$

варьируемого по независимым переменным $\mathbf{A}$, χ:

$$\delta\mathbf{B} = \mathrm{rot}\delta\mathbf{A}, \quad \delta\mathbf{B}_u = \mathrm{rot}\delta\mathbf{A}_u = \mathrm{rot}\left(\frac{1}{a_e\rho}\mathrm{rot}\chi \times \mathbf{B}_u\right). \tag{53}$$

Для удобства мы обозначили $\mathbf{B}_u = \boldsymbol{\Omega}/a_e$, $\mathbf{A}_u = \mathbf{u}/a_e$. Первая вариация (52) дает уравнения (36),(37), а вторая – после минимизации по $\delta\mathbf{A}$ – критерий устойчивости

$$\delta^2 H_e = \int d^3x\,(\delta\mathbf{B} + \mathrm{rot}\mathbf{B} \times \xi_e) \cdot \delta\mathbf{B}_u > 0. \tag{54}$$

Здесь $\delta\mathbf{B}_u$ задается (53), а

$$\delta\mathbf{B} + \mathrm{rot}\left(\frac{\mathrm{rot}\delta\mathbf{B}}{a_e^2\rho}\right) = \delta\mathbf{B}_u. \tag{55}$$

Критерий (54) был получен и обсуждался в [30]. В пределе $a_e \to \infty$ имеем $\delta\mathbf{B}_u \to \delta\mathbf{B}$, и (54) переходит в энергетический принцип [1], в котором пренебрегается давлением или сжимаемостью плазмы (эффект неподвижных ионов).

Описанная в настоящем разделе методика была также применена нами для получения вариационных критериев устойчивости в случае анизотропной плазмы (в рамках модели Чу – Гольдбергера – Лоу)[31] и в случае "адиабатического" варианта [32] энергетического принципа [1].

Однако следует отметить, что все вышеупомянутые критерии устойчивости, учитывающие соответствующие законы сохранения, являются достаточными, и для конкретных ситуаций могут довольно заметно отличаться от необходимых. Этому есть несколько возможных объяснений.

1. Необходимые связи, устраняющие излишний произвол в вариациях импульсов и смещений, являются нелокальными и, например, явно зависящими от времени. Тем самым, получение необходимого и достаточного вариационного критерия может быть в принципе невозможно.

2. Необходимая взаимосвязь дается нелокальными законами сохранения, что требует рассмотрения нелокальных вариационных симметрий помимо симметрий Ли – Бэклунда.

3. При получении критериев устойчивости в разд.5 мы использовали фактически *интегральные следствия* (такие, как (47)) законов сохранения, тогда как сами законы (такие, как (24), (25)) носят *локальный* характер и требуют более аккуратного учета.

С нашей точки зрения именно более детальный учет уже известных законов сохранения (п.3) может быть продуктивен для дальнейшего улучшения вариационных критериев устойчивости.

4. Заключение. Показано, что вариационные методы весьма эффективны для анализа широкого круга проблем нелинейной динамики плазмы, описываемой различными МГД моделями, и, прежде всего, для выявления вариационных симметрий и соответствующих им законов сохранения, для построения вариационных критериев устойчивости, а также для адиабатического разделения движений и построения редуцированных МГД моделей. При этом знание лагранжевой структуры плазменных гидродинамических моделей позволяет получать общие выражения для законов сохранения, свойственных этим моделям.

Для рассмотренных гидродинамических моделей в явном виде получены уравнения вариационных симметрий и общий вид законов сохранения. Анализ, проведенный для МГД и ЭМГ, позволил выявить все вариационные симметрии в классе симметрий Ли – Бэклунда 1 порядка. Важной чертой всех МГД моделей является то, что, наряду с хорошо известными симметриями, порождающими сохранение энергии, импульса и момента системы как целого, в трехмерной геометрии допустимы симметрии перемаркировки жидких элементов. Эти симметрии порождают законы сохранения, дающие более детальную информацию об инвариантности компонент обобщенного импульса рассматриваемой системы, и потому, вопреки довольно распространенному мнению, являются весьма содержательными. Более того, поскольку само появление этих симметрий и законов сохранения зависит от топологии системы и(или) от исходного распределения параметров системы, именно они, а не бесконечный набор казимиров, полностью покрываемый введением лагранжевой координатной сетки, дают наиболее существенные ограничения на допустимые вариации динамических переменных.

Еще одним важным и перспективным направлением в исследованиях нелинейных МГД систем является, на наш взгляд, построение адиабатических МГД моделей, в которых удается исключить из рассмотрения быстрые устойчивые коллективные степени свободы и тем самым существенно упростить описание динамики рассматриваемой системы. Представленный в данной работе вариационный метод адиабатического разделения быстрых и медленных движений в лагранжевых системах, основанный на поиске приближенных преобразований симметрии перемаркировки для быстрого движения, открывает достаточно регулярный и эффективный путь для построения указанных адиабатических моделей. Существенно, что при таком методе разделения движений в адиабатической модели не разрушаются симметрии исходной динамической системы. Приложение метода не ограничивается выводом адиабатической версии редуцированных уравнений Кадомцева – Погуце – Страусса, приведенных нами в качестве конкретного примера.

Работа в значительной степени была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты # 97-02-17730 и # 97-02-17238). Один из нас (В.И.И.) благодарит В.Лахина, совместно с которым получены результаты по нахождению полной группы симметрий для уравнений МГД и ЭМГ.

1. I.B.Bernstein, E.A.Frieman, M. .Kruskal, and R.M.Kulsrud, Proc. Roy. Soc. London. **A244**, 17 (1958).
2. Р.Курант и Д.Гильберт, *Методы математической физики*, т.1, М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951.
3. J.Serrin, Handbuch der Physik, Ed. S.Flügge. Springer-Verlag, Berlin, 1959, v.VIII/1.
4. T.H.Boyer, Ann. Phys. **42**, 445 (1967).
5. V.Rosenhaus and G.H.Katzin, J. Math. Phys. **35**, 1998 (1994).
6. В.И.Ильгисонис, В.П.Лахин, Физика плазмы **25**, 64 (1999).
7. W.Newcomb, Nucl. Fusion Suppl. **2**, 451 (1962).
8. N.Padhye and P.Morrison, Plasma Phys. Reports. **22**, 869 (1996).
9. В.И.Ильгисонис, В.П.Пастухов, Физика плазмы **22**, 228 (1996).
10. E.Hameiri, J. Math. Phys. **22**, 2080 (1981).
11. А.С.Кингсеп, К.В.Чукбар, В.В.Яньков, Вопросы теории плазмы, под ред. Б.Б.Кадомцева, вып.16, М.: Энергоатомиздат, 1987, с. 209.
12. V.I.Ilgisonis and V.P.Lakhin, Electromagnetic waves & Electronis Systems **3**(2, 3) (1998).
13. P.J.Olver, *Applications of Lie Groups to differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
14. В.П.Пастухов, Письма в ЖЭТФ **67**, 892 (1998).
15. В.П.Пастухов, Физика плазмы **26**, 566 (2000).
16. Б.Б.Кадомцев, О.П.Погуце, ЖЭТФ **65**, 575 (1973).
17. Б.Б.Кадомцев, О.П.Погуце, ЖЭТФ **66**, 2067 (1974).
18. R.White, .Monticello et al., *5-th Intern. Conf. on Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res.*, v.1, Vienna, IAEA, 1975, p.495.
19. H.Strauss, Phys. Fluids **19**, 134 (1976).
20. H.Strauss, Nucl. Fusion. **23**, 649 (1983).
21. R. .Hazeltine, M.Kotschenreuther, and P.J.Morrison, Phys. Fluids. **28**, 2466 (1985).
22. А.Бернштейн, *Основы физики плазмы*, под ред. А.А.Галеева и Р.Судана, т.1, М.: Энергоатомиздат, 1983, с.365.
23. V.I.Ilgisonis and V.P.Pastukhov, Письма в ЖЭТФ **61**, 186 (1995).
24. E.Frieman and M.Rotenberg, Rev. Mod. Phys. **32**, 898 (1960).
25. . .Holm, J.E.Marsden, T.Ratiu, and A. Weinstein. Phys. Rep. **123(1&2)**, 1 (1985).
26. V.A.Gordin and V.I.Petviashvili, Письма в ЖЭТФ **68**, 988 (1989).
27. V.I.Arnold, J. Appl. Math. Mech. **29**, 1002 (1965).
28. E.Hameiri and H.A.Holties, Phys. Plasmas. **1**, 3807 (1994).
29. V.I.Ilgisonis, Trans. Fusion Techn. **35**, 170 (1999).
30. V.I.Ilgisonis, *Proc. 26th EPS Conf. on Contr. Fusion and Plasma Phys.*, ECA **23J**, 861 (1999).
31. V.I.Ilgisonis, Phys. Plasmas **3**, 4577 (1996).
32. V.P.Pastukhov, *Theory of Fusion Plasmas: Proc. of the Joint Varenna-Lausanne Intern. Workshop*, 1998, Societa Italiana di Fisica, p. 449.