

## МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ НЕВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ФЕРМИОНОВ В ОГРАНИЧЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

А.Р.Миннуллин, Д.А.Таюрский

Казанский государственный университет, 420008 Казань, Россия

Поступила в редакцию 13 ноября 2000 г.

После переработки 21 ноября 2000 г.

Сообщается о теоретических результатах исследования модельной системы идеального газа нейтральных ферми-частиц в ограниченной геометрии различной симметрии и размеров. Полученные качественно новые особенности поведения подобных систем, такие как осцилляции магнитной восприимчивости в зависимости от размера геометрии и от концентрации частиц, свидетельствуют о том, что ограниченность геометрии существенно влияет на термодинамические свойства системы.

PACS: 67.60.-s, 75.40.-Gb

1. Непрерывность энергетического спектра является приемлемым приближением для макроскопических систем при высоких температурах. Для конечных же систем дискретность энергии имеет важные следствия при низких температурах. Хорошо известно, например, что система фермионов в ограниченной геометрии приобретает ряд новых, часто весьма неожиданных свойств. Интерес к задачам подобного рода возник достаточно давно в связи с исследованиями металлических наночастиц [1–6] и свойств атомных ядер (см., например, [7, 8]). Успехи в нанотехнологии стимулировали исследования влияния эффектов размерности на свойства конечных бозе-и ферми-частиц (см., например, препринт [9] и ссылки в нем). В последнее время наблюдается повышенный интерес к физическим свойствам квантовых жидкостей – жидкого  $^3\text{He}$  и жидкого  $^4\text{He}$  – в ограниченной геометрии. Исследования этих жидкостей в порах твердых тел (см., например, [10, 11]), мезоскопических капель жидкого  $^3\text{He}$  в твердом  $^4\text{He}$  [12], свидетельствуют о появлении новых черт поведения этих жидкостей в подобных условиях.

Следует отметить, что результаты предыдущих исследований конечных ферми-систем не могут быть непосредственно применены для жидкого  $^3\text{He}$  ввиду отсутствия в последнем кулоновского и электронного спин-орбитального взаимодействий, которые ответственны за свойства электронов проводимости в металлических наночастицах, или сильного взаимодействия между нуклонами, определяющего свойства ядерной материи.

В качестве примера применения теории ферми-жидкости Ландау при исследованиях свойств жидкого  $^3\text{He}$  в ограниченной геометрии можно упомянуть работу [13], где исследовались коэффициенты переноса в ситуации, когда длина свободного пробега квазичастиц сравнима с размерами системы.

При рассмотрении влияния конечности геометрии на свойства жидкого  $^3\text{He}$ , по видимому, необходимо различать две причины появления каких-либо новых свойств по сравнению с объемной жидкостью:

а) “чисто геометрический” фактор – наличие геометрической границы изменяет энергетический спектр даже системы невзаимодействующих фермионов;

б) “ферми-жидкостный” фактор – теория ферми-жидкости Ландау, или любая другая теория ферми-жидкости, должна быть переформулирована для случая ограниченной геометрии ввиду существенного влияния размеров системы на спектр элементарных возбуждений.

Что касается первого из перечисленных факторов, то его влияние было продемонстрировано нами в [14], где для объяснения неожиданно быстрой магнитной релаксации жидкого  ${}^3\text{He}$  в контакте с диэлектрическими ван-Флековскими кристаллами и их диамагнитными аналогами была предложена модель влияния ограниченной геометрии (микротрещины на поверхности кристаллов) на магнитную релаксацию. Основная идея предложенной модели заключается в следующем. В твердом теле, где трансляционное движение атомов практически отсутствует, линия магнитного резонанса достаточно широка, а времена поперечной релаксации малы. В жидкости за счет поступательного движения атомов резонансная линия сильно сужена, а времена релаксации велики. Когда жидкость, в которой существенным механизмом релаксации является модуляция диффузионным движением диполь-дипольного взаимодействия, помещается в ограниченную геометрию, то в отличие от объемной жидкости не все моды диффузионного движения возможны – “выживают” только резонирующие моды. Следовательно, линия магнитного резонанса не будет так сужена, как в случае объемной жидкости, и в то же время не так широка, как в случае твердого тела. Что касается квантовой жидкости – жидкого  ${}^3\text{He}$  – подобных ограничений на диффузионное движение может быть и больше, например, за счет принципа запрета Паули. Численные расчеты для ограниченной геометрии сферической симметрии подтверждают эти качественные соображения и дают различие во временах продольной и поперечной релаксаций жидкого  ${}^3\text{He}$  по крайней мере на порядок величины [14, 15].

В настоящей работе мы покажем, как ограниченность геометрии приводит к появлению новых физических свойств системы невзаимодействующих фермионов ( в качестве таковой могут быть рассмотрены газообразный  ${}^3\text{He}$  и слабые квантовые растворы  ${}^3\text{He}$  в  ${}^4\text{He}$ ). В частности, зависимость магнитной восприимчивости такой системы от размеров или от плотности числа частиц становится осциллирующей функцией. В некоторой мере это напоминает хорошо известный эффект де Гааза – ван Альфена в электронном газе в металлах за счет квантования уровней Ландау.

Учет реального взаимодействия между атомами  ${}^3\text{He}$ , например, в форме потенциала Азиза [16] является предметом наших дальнейших исследований.

2. Термодинамические характеристики конечных систем, такие как теплоемкость, магнитная восприимчивость, значительно отличаются от соответствующих макроскопических параметров благодаря дискретности возможных состояний. Среднее расстояние  $\delta$  между одночастичными состояниями в конечной системе порядка  $E_F/N$ , где  $E_F$  есть энергия Ферми, а  $N$  – число частиц. Если тепловая энергия  $kT$  или зеемановская энергия  $\mu H$  частицы во внешнем магнитном поле  $H$  ( $\mu$  – магнитный момент частицы), или еще какая-либо характерная энергия становятся порядка или меньше  $\delta$ , то дискретный характер уровней начинает проявляться в соответствующих термодинамических характеристиках. Поскольку для ферми-систем свойства определяются плотностью энергетических состояний на уровне Ферми, то дальнейший анализ влияния дискретности уровней на термодинамику требует некоторых

предположений о характере распределения энергетических уровней вблизи энергии Ферми ([3]).

Однако для системы нейтральных фермионов возможен и другой подход к изучению эффектов ограниченности геометрии, основанный на нахождении энергетического спектра частиц путем решения соответствующего уравнения Шредингера и дальнейшего анализа термодинамических и магнитных свойств таких систем.

Наиболее просто эффекты ограниченной геометрии могут быть продемонстрированы на примере системы  $N$  невзаимодействующих фермионов, заключенной внутри сферы радиуса  $R$ . С экспериментальной точки зрения такая ограниченная геометрия реализуется при исследованиях мезоскопических капель жидкого  ${}^3\text{He}$  в твердом  ${}^4\text{He}$  [12]. Конечно же, капли жидкого  ${}^3\text{He}$  нельзя рассматривать как газ невзаимодействующих атомов  ${}^3\text{He}$  и, как отмечалось выше, ферми-жидкостный подход Ландау также требует пересмотра из-за изменений в спектре элементарных возбуждений за счет ограниченности геометрии. Тем не менее, проявления влияния ограниченности геометрии для системы невзаимодействующих фермионов представляют интерес с точки зрения первого приближения к реальной ситуации.

В рассматриваемом случае энергетический спектр частиц (без учета вырождения по спину) имеет вид

$$E_{l,n} = \frac{\hbar^2}{2m} k_{l,n}^2, \quad (1)$$

где  $m$  есть масса частицы, в данном случае атома  ${}^3\text{He}$ , а  $k_{l,n}$  находятся из уравнения для нулей функции Бесселя

$$J_{l+\frac{1}{2}}(kR) = 0. \quad (2)$$

Отметим сразу, что функция Бесселя для каждого  $l$  имеет бесконечное число нулей, которые нумеруются индексом  $n$ . Так как  $l$  представляет собой орбитальный момент частицы, то каждый уровень энергии  $E_{n,l}$   $2l + 1$ -кратно вырожден и при больших значениях  $l$  имеется весьма сильное вырождение. Это вырождение может быть снято внешним магнитным полем. Кроме того, понижение симметрии ограниченной геометрии (например, до кубической или аксиальной) также приведет к значительному снятию вырождения энергетических уровней спектра частиц. Для наших вычислений термодинамических и магнитных характеристик газа невзаимодействующих фермионов в сферической ограниченной геометрии численными методами были найдены нули функций Бесселя, максимальное значение которых (нулей) не превышает 500. Это позволило нам рассматривать системы с размерами до  $100 \text{ \AA}$  и числом частиц до 100000. С помощью полученной таблицы нулей функций Бесселя энергетический спектр может быть переписан в виде  $E_i$ , где номер  $i$  нумерует состояния по мере возрастания энергии.

**Энергия Ферми и плотность числа состояний для ферми-газа, заключенного в сферу радиуса  $R$ . Концентрация частиц равна концентрации атомов жидкого  ${}^3\text{He}$  при нулевом давлении**

$R, \text{ \AA}$	$E_F, \text{ К}$	Плотность состояний, $1/\text{К}$
25	6.01	170
50	5.87	1200
100	5.71	10000

Энергия Ферми  $E_F$  и заселенность каждого уровня  $n_i$  при температуре  $T$  определяются обычным образом:

$$N = \sum_i \frac{1}{\exp((E_i - E_F)/kT) + 1}, \quad (3)$$

$$n_i = \frac{1}{\exp((E_i - E_F)/kT) + 1}. \quad (4)$$

Полученные значения энергии Ферми и плотности состояний на уровне Ферми для различных радиусов сферической геометрии приведены в таблице (для численных расчетов мы выбрали значение для концентрации частиц, соответствующее значению для жидкого  $^3\text{He}$  при нулевом давлении  $-1.62 \cdot 10^{28} \text{m}^{-3}$ ). При увеличении радиуса сферы значение энергии Ферми монотонно уменьшается и стремится к величине 5 К, получаемой при рассмотрении объемного жидкого  $^3\text{He}$  как газа невзаимодействующих ферми-частиц. Зависимость плотности числа состояний от энергии для сферы радиуса 50 Å показана на рис.1. Отчетливо прослеживается осциллирующий характер такой зависимости. Следовательно, можно ожидать проявления осцилляций в наблюдаемых физических характеристиках системы.

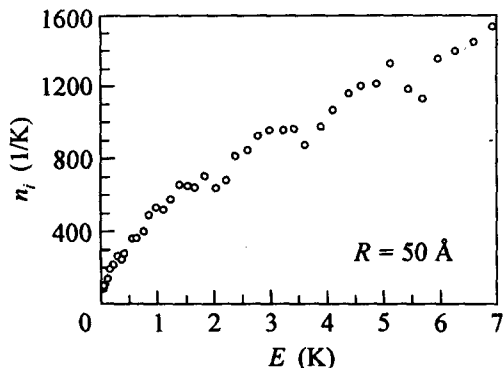


Рис.1. Зависимость плотности состояний от энергии для ферми-газа, заключенного в сферу радиуса  $R = 50 \text{ \AA}$ . Концентрация частиц равна концентрации атомов жидкого  $^3\text{He}$  при нулевом давлении

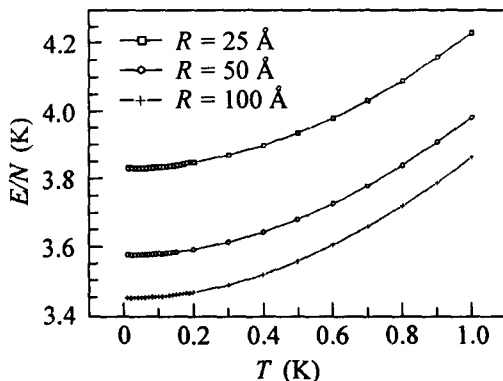


Рис.2. Температурная зависимость энергии, приходящейся на одну частицу, для сфер различного радиуса

На рис.2 и 3 показаны температурные зависимости энергии, приходящейся на одну частицу, и теплоемкости ферми-газа, заключенного в сферы различных радиусов. Отметим здесь, что теплоемкость в приближении невзаимодействующих частиц не зависит от размеров ограниченной геометрии и показывает линейную температурную зависимость при температурах ниже 0.5 К (что соответствует примерно  $0.1T_F$ ). Наши вычисления показывают, что подобное поведение справедливо и для других форм ограниченной геометрии, например, для куба.

Как уже отмечалось выше, из-за немонотонного характера зависимости плотности состояний от энергии можно ожидать появления осцилляций в физических характеристиках газа невзаимодействующих ферми-частиц, заключенного в ограниченную геометрию. С этой целью нами была рассчитана магнитная восприимчивость такого газа в зависимости от температуры, концентрации частиц и размеров

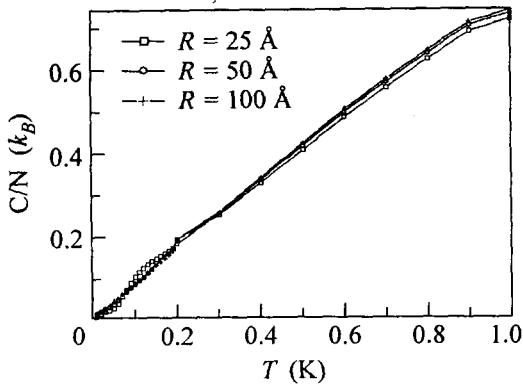


Рис.3. Температурная зависимость теплоемкости, приходящейся на одну частицу, для сфер различного радиуса

ограниченной геометрии. Магнитная восприимчивость в магнитном поле  $H$  вычисляется обычным образом:

$$\chi = \frac{\gamma \hbar}{2} \frac{\sum (n_{i,\uparrow} - n_{i,\downarrow})}{VH}, \quad (5)$$

где заселенности уровней с учетом спина  $n_{i,\uparrow(\downarrow)}$  равны

$$n_{i,\uparrow(\downarrow)} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E_i - E_F - (+)\frac{1}{2}\gamma\hbar H}{kT}\right) + 1}. \quad (6)$$

Здесь  $\gamma$  – гиромагнитное отношение ядерных спинов  $^3\text{He}$ ,  $\gamma/2\pi = 3.24$  кГц/Э. Наиболее интересной является полученная осциллирующая зависимость магнитной восприимчивости от радиуса сферы (рис.4). Подобное поведение восприимчивости при

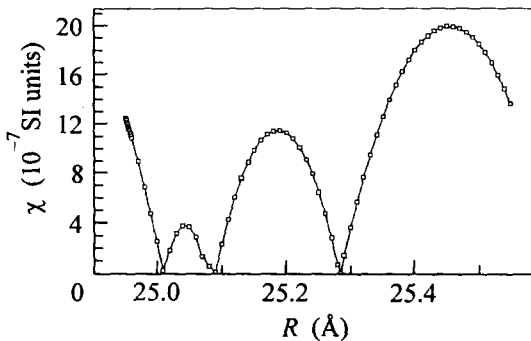


Рис.4. Зависимость магнитной восприимчивости от радиуса сферы

низких температурах легко понять из следующих рассуждений. При очень низких температурах восприимчивость, как и намагниченность, определяется частицами на ближнем к  $E_F$  энергетическом уровне. Предположим, что этот уровень  $2l$ -кратно вырожден (с учетом вырождения по спину), на нем находится  $n$  частиц. В слабом магнитном поле эта система имеет восприимчивость, удовлетворяющую закону Кюри. Причем ее величина пропорциональна разности числа частиц с противоположными проекциями спина (мы рассматриваем частицы со спином  $1/2$ ). Восприимчивость достигает максимального значения при  $n = l$  и уменьшается при приближении  $n$  к нулю либо к  $2l$ . Такое поведение в некотором роде аналогично появлению ос-

цилляций де Гааза – ван Альфена в электронном газе за счет квантования уровней Ландау.

Конечно, в экспериментальных условиях практически невозможно осуществить изменения радиуса ограниченной геометрии, необходимые для наблюдения подобных осцилляций. Однако плотность числа доступных состояний зависит также от концентрации частиц, которую можно достаточно легко менять, например, в экспериментах со слабыми растворами  ${}^3\text{He} - {}^4\text{He}$ . На рис.5 представлены осцилляции магнитной восприимчивости в зависимости от концентрации ферми-части при различных температурах для сферы радиуса  $25 \text{ \AA}$ . Отчетливо прослеживается размытие осцилляций при повышении температуры, связанное с размытием распределения частиц по энергетическим уровням вблизи уровня Ферми.

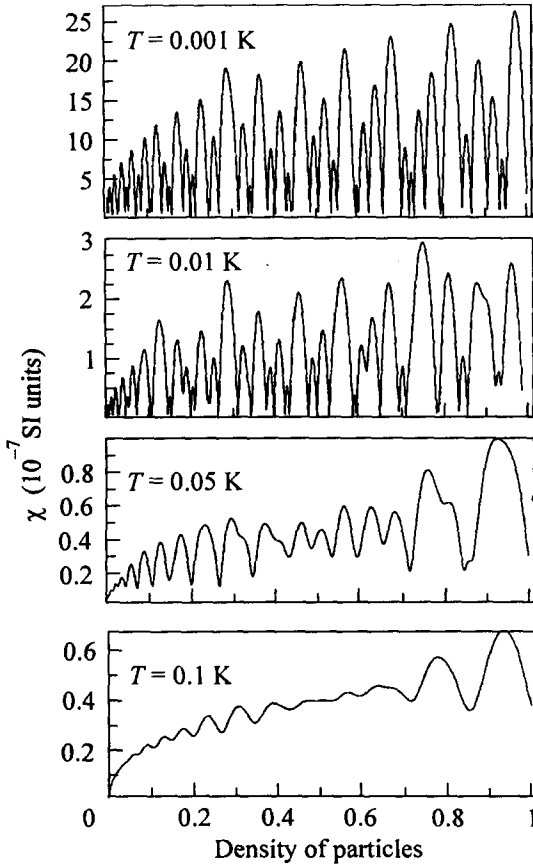


Рис.5. Зависимость магнитной восприимчивости от концентрации частиц при разных температурах для сферы радиуса  $25 \text{ \AA}$

Наши расчеты для ограниченной геометрии более низкой симметрии – аксиальной (характерной, например, для экспериментов с жидким  ${}^3\text{He}$  в стекле Vucor [10, 17]) показывают усиление характера осцилляций и даже появление некоторой модуляции этой зависимости, причины которой пока не ясны.

Отметим, что недавние эксперименты по наблюдению “выталкивания” квази-частиц жидкого  ${}^3\text{He}$  из пор стекла Vucor при понижении температуры [17] также объяснялись изменением плотности числа состояний на уровне Ферми за счет ограниченности геометрии. Обнаруженная в работе [18] “полусверхтекучесть” жидко-

го  $^3\text{He}$  в аэрогеле также свидетельствует о существенном изменении магнитных и орбитальных состояний  $^3\text{He}$  внутри аэрогеля, так что дальнейшие теоретические исследования влияния ограниченности геометрии на свойства ферми-систем представляются нам весьма актуальными.

В данной работе для иллюстрации влияния ограниченной геометрии на свойства системы нейтральных ферми-частиц мы рассмотрели модельную задачу об идеальном ферми-газе, заключенном в сферу, куб и цилиндр различных размеров. Полученные особенности поведения подобных систем, такие, как осцилляции магнитной восприимчивости в зависимости от концентрации частиц, показывают, что даже для идеальных систем ограниченная геометрия приводит к существенно новым чертам поведения. Очевидно, что учет реального взаимодействия между нейтральными ферми-частицами, что является предметом наших дальнейших исследований, позволит приблизиться к экспериментальной ситуации, реализуемой при исследованиях жидкого  $^3\text{He}$  в ограниченной геометрии.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 99-02-17536), The Netherlands Organization for Scientific Research (NWO, project # 047-008-015), научно-образовательного центра REC-007.

Авторы признательны Л.П.Тагирову, М.С.Тагирову и И.А.Фомину за обсуждение результатов работы.

- 
1. R.Kubo, J. Phys. Soc. Jap. **17**, 975 (1962).
  2. A.Kawabata, J. Phys. Soc. Jap. **29**, 902 (1970).
  3. R.Denton, B.Mühschlegel, and D.J.Scalapino, Phys. Rev. **B7**, 3589 (1973).
  4. J.Barojas, E. Cota, E.Blastein-Barojas et al., Ann. Phys. **107**, 95 (1977).
  5. E.Blastein-Barojas, J.Flores, P.A.Mello et al., Phys. Lett. **61A**, 146 (1977).
  6. G.M.Pastor, R.Hirsch, and B. Mühschlegel, Phys. Rev. **53**, 10382 (1996).
  7. A.V.Migdal and A.I.Larkin, Nucl. Phys. **51**, 561 (1964).
  8. А.Б.Мигдал *Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер*, М.: Наука, 1983.
  9. D.V.Anghel, <http://xxx.lanl.gov/condmat/0006430>.
  10. B.N.Engel, G.G.Ihas, and G.F.Spencer, Can. J. Phys. **65**, 1545 (1987).
  11. R. Schrenk and R.König, Phys. Rev. **B57**, 8518 (1998).
  12. R. Schrenk, R.König, and F.Pobell, Phys. Rev. Lett. **76**, 2945 (1996).
  13. M.J.Rice, Phys. Rev. **165**, 288 (1968).
  14. В.В.Налетов, М.С.Тагиров, Д.А.Таюрский, М.А.Теплов, ЖЭТФ **108**, 577 (1995).
  15. D.A.Tayurskii, in *Extended Abstracts of the XXVIIth Congress AMPERE*, Kazan, 1994, p.219.
  16. R.A.Aziz, V.P.S.Nain, J.S.Carley et al., J. Chem. Phys. **70**, 4330 (1979).
  17. P.A.Reeves, A.M.Guénault, S.N.Fisher et al., Physica **B284-288**, 319 (2000).
  18. Yu.M.Bunkov, A.S.Chen, D.J.Cousins, and H.Godfrin, Phys. Rev. Lett. **85**, 3456 (2000).