Письма в ЖЭТФ, том 71, вып.6, стр.372 - 376

О ЗАКОНЕ ДИСПЕРСИИ СОЛИТОНОВ ТИПА КИНКОВ В ОДНОМЕРНЫХ ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

Е.Г.Галкина, Б.А.Иванов[1)]

Институт физики НАН Украины
252650 Киев, Украина

Институт магнетизма НАН Украины
Киев, Украина

Поступила в редакцию 14 февраля 2000 г.

Показано, что энергия солитона типа кинка в одномерных ферромагнетиках периодически зависит от импульса солитона. Значение периода P_0 определяется величиной спина и характером анизотропии ферромагнетика.

PACS: 75.10.Hk, 75.40.Ds

1. Нелинейные возбуждения (солитоны) играют важную роль в физике низкоразмерных упорядоченных сред. В частности, солитоны типа кинков (доменные стенки) нужно учитывать наряду с линейными возбуждениями (магнонами) при описании физических свойств квазиодномерных ферромагнетиков (ФМ), см. [1, 2]. Для последовательного изучения указанных ФМ нужно знать не только статическую энергию кинка, но и его закон дисперсии, то есть зависимость энергии кинка E от его импульса P. Поскольку уравнения Ландау – Лифшица, описывающие динамику ФМ, не обладают галилеевской или лоренц-инвариантностью, вид зависимости $E(P)$ заранее не очевиден.

Для того чтобы найти $E(P)$, нужно знать структуру кинка, движущегося с немалой скоростью V. В настоящее время решение, описывающее кинк с $V \neq 0$, известно только для простейшей модели ромбического ФМ, которая является точно интегрируемой методом обратной задачи рассеяния, см. [2, 3]. Для этого случая (уокеровского решения) энергия кинка периодически зависит от его импульса P, период P_0 выражается через "континуальные" характеристики ФМ, $P_0 = 2\pi M_0/g$, где M_0 – намагниченность единицы длины ФМ, g – гиромагнитное отношение [2, 3].

С учетом того, что $g = 2\mu_0/\hbar$ и $M_0 = 2\mu_0 S/a$, где S – спин атома, a – постоянная решетка, μ_0 – магнетон Бора, величина $P_0 = 2\pi\hbar S/a$ для уокеровского решения. Для магнитного биона (солитона с конечным числом связанных магнонов, который можно представить как связанное состояние двух кинков) величина периода увеличивается вдвое и равняется $4\pi\hbar S/a$. Для случая $S = 1/2$ эта величина совпадает с размером зоны Бриллюэна, $P_B = 2\pi\hbar/a$. Таким образом, в рамках континуальной модели возникает результат, характерный для дискретных моделей ФМ. Более того, закон дисперсии бионов, полученных как классические решения континуальных уравнений Ландау – Лифшица, в точности совпадает с законом дисперсии спиновых комплексов, известных для спинов XYZ-цепочки со спином $S = 1/2$ [3]. Авторы [3] связали периодичность закона дисперсии магнитных возбуждений с тем, что данная модель является точно интегрируемой в классическом случае и одновременно представляет собой континуальный предел точно решаемой квантовой дискретной

1) e-mail: vbaryakhtar@bitp.kiev.ua

модели. Однако вопрос о появлении в континуальных классических моделях ФМ ответов, присущих квантовым дискретным теориям, оставался не ясным до сих пор.

Мы покажем, что периодическая зависимость $E(P)$ свойственна широкому классу континуальных моделей ФМ и что это обстоятельство определяется топологическими соображениями.

2. Бездиссипативная динамика ФМ в континуальном приближении описывается уравнением Ландау – Лифшица для нормированной намагниченности – единичного вектора $\mathbf{m}$. В угловых переменных $m_x + m_y = \sin\theta \exp(i\varphi)$, $m_z = \cos\theta$ оно может быть получено из следующего лагранжиана [2, 3]:

$$L = \hbar S/a \int dx(1-\cos\theta)\partial\varphi/\partial t - \int dx/aW(\theta,\varphi), \tag{1}$$

где $W(\theta,\varphi)$ – плотность энергии ФМ. Для гайзенберговского ФМ с учетом слабой магнитной анизотропии

$$W(\theta,\varphi) = (Ja^2/2)[(\partial\theta/\partial x)^2 + \sin^2\theta(\partial\varphi/\partial x)^2] + W_r(\theta,\varphi). \tag{2}$$

Здесь J – обменный интеграл, $W_r(\theta,\varphi)$ – энергия магнитной анизотропии. Структура кинка определяется решениями типа простой волны, $\mathbf{m} = \mathbf{m}(\xi)$ или $\theta = \theta(\xi)$, $\varphi = \varphi(\xi)$, $\xi = x - Vt$, V – скорость кинка, с граничными условиями $\mathbf{m}(\xi \to -\infty) = \mathbf{m}^{(-)}$, $\mathbf{m}(\xi \to +\infty) = \mathbf{m}^{(+)}$, где $\mathbf{m}^{(-)}$, $\mathbf{m}^{(+)}$ – два различных, но эквивалентных минимума энергии $W_r(\theta,\varphi)$.

Импульс кинка находится как суммарный полевой импульс поля намагниченности,

$$P = -\hbar S/a \int dx(1-\cos\theta)\partial\varphi/\partial x. \tag{3}$$

Динамическая часть лагранжиана (1) и выражение для импульса (3) содержат сингулярности, связанные с недифференцируемостью азимутального угла φ в точках $\theta = 0, \pi$ [4, 5] (это свойство переменной φ играет существенную роль при описании динамики магнитных вихрей [5]). Происхождение этой сингулярности становится понятным при переходе к переменной $\mathbf{M} = M\mathbf{m}$, не связанной условием $\mathbf{M}^2 = \text{const}$. В терминах $\mathbf{M}$ выражение для импульса можно привести к виду

$$P = -\int dx \mathbf{A}\partial\mathbf{M}/\partial x, \quad \mathbf{A} = (\hbar S/a)[\mathbf{e}_y M_x - \mathbf{e}_x M_y]/M(M+M_z), \tag{4}$$

вектор $\mathbf{A}$ имеет особенность на линии $M_x = M_y = 0$, $M_z = -M$.

Формально динамическая часть лагранжиана (1), представленная через $\mathbf{M}$, $\partial\mathbf{M}/\partial t$ (или импульс (4) при замене $\partial\mathbf{M}/\partial t \to -\partial\mathbf{M}/\partial x$), совпадает с лагранжианом заряженной частицы в магнитном поле с вектор-потенциалом $\mathbf{A}$. Нетрудно показать, что вектор $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = (\hbar S/A)\mathbf{M}/M^3$ не содержит сингулярностей при $M \neq 0$. Таким образом, выражение (4) для $\mathbf{A}$ описывает вектор-потенциал магнитного монополя, расположенного в начале координат. Вектор-потенциал $\mathbf{A}$ для монополя непременно имеет сингулярность на линии (струне Дирака), выходящей из точки положения монополя и уходящей на бесконечность [4]. Допустимые преобразования (1) или (3) сводятся к калибровочным преобразованиям, то есть к изменению ориентации струны Дирака, см. [4].

Значение импульса кинка не инвариантно относительно этих калибровочных преобразований. Однако важно, что разность импульсов для двух различных состояний кинка является калибровочно-инвариантной величиной. Действительно, различным кинкам, например, кинкам с разными скоростями, но одинаковыми условиями на бесконечности (фиксированными точками $\mathbf{m}^{(-)}$ и $\mathbf{m}^{(+)}$), можно сопоставить траектории, выходящие из точки $\mathbf{m}^{(-)}$ и идущие в точку $\mathbf{m}^{(+)}$. При этом импульсы кинков определяются интегралом вида $\int \mathbf{A}d\mathbf{M}$ по этим траекториям. Ясно, что разность импульсов определяется интегралом по замкнутому контуру $\int \mathbf{A}d\mathbf{M}$, который по теореме Стокса может быть записан как поток вектора $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ через поверхность, охватываемую этим контуром, $\int \mathbf{B}d\mathbf{S}$. Возвращаясь к угловым переменным, представим разность импульсов двух состояний кинка в калибровочно-инвариантном виде,

$$\Delta P = (\hbar S/a) \int \sim \theta d\theta d\varphi, \tag{5}$$

где интеграл берется по области на сфере, ограниченной траекториями, отвечающими двум кинкам. Таким образом, зависимости $V(P)$ или $E(P)$ восстанавливаются с точностью лишь до произвольности начала отсчета импульса.

3. Рассмотрим конкретные модели магнетиков на основе развитых выше общих соображений. Как мы отмечали, простейшая модель ромбического ФМ с $W_r = K_1 m_x^2 + K_2 m_y^2$ является единственной моделью, для которой известно точное решение, описывающее движущийся кинк (решение Уокера, см. [2,3]). Дело в том, что система обыкновенных уравнений для $\theta = \theta(\xi)$, $\varphi = \varphi(\xi)$,

$$Ja^2\theta'' - Ja^2 \sin\theta\cos\theta(\varphi')^2 - \partial W_r/\partial\theta = (V\hbar S/a)\varphi' \sin\theta, \tag{6}$$

$$Ja^2(\sin\theta\varphi')' - \partial W_r/\partial\varphi = -(V\hbar S/a)\theta' \sin\theta, \tag{7}$$

определяющая структуру кинка (штрихом обозначена производная по ξ), имеет, вообще говоря, лишь один первый интеграл $Ja^2[(\theta')^2 + \sin^2\theta(\varphi')^2] - 2W_r(\theta,\varphi)$ и не является интегрируемой. Однако решение при $V = 0$ находится без труда, ему отвечает $\theta = \theta(\xi)$, $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$, где φ_0 определяется соотношением $\partial W(\theta,\varphi_0)/\partial\varphi_0 = 0$. При этом приходится решать только одно уравнение второго порядка (6) для переменной θ при $\varphi = \varphi_0$, и наличие одного первого интеграла достаточно для построения решения.

Начнем с анализа магнетика с анизотропией типа "легкая ось" и легкой осью n-го порядка. Энергия анизотропии в случае $n = 2, 4, 6$ имеет вид

$$W_r(\theta,\varphi) = K(\sin^2\theta) + K_{bp}\sin^n\theta\sin^2(n\varphi/2); \tag{8}$$

функция $K(\sin^2\theta)$ содержит слагаемые типа $\sin^2\theta$, $\sin^4\theta\ldots$ и имеет минимум при $\theta = 0,\pi$; $K_{bp} > 0$. Условие $\partial W/\partial\varphi = 0$ дает два набора значений φ: n значений $\varphi_{min} = 2\pi m/n$ и n значений $\varphi_{max} = 2\pi(2m+1)/2n$, m – целое число, отвечающие минимуму и максимуму W_r при данном θ, соответственно. Траектории, описывающие неподвижные кинки, являются половинками большого круга, проходящего через полюсы $\theta = 0,\pi$ на сфере $\mathbf{m}^2 = 1$. Траектории с $\varphi = \varphi_{min}$ и $\varphi = \varphi_{max}$ описывают энергетически выгодные и невыгодные кинки, соответственно. Все остальные траектории, соответствующие движущимся кинкам, заполняют промежутки между этими траекториями. (Отметим, что в решении Уокера при $V \neq 0$ угол $\varphi = \varphi(V)$ и величина $\partial\varphi/\partial\xi = 0$; $\varphi = 0,\pi/2$ при $V = 0$, но условие $\varphi = \mathrm{const}$ при $V \neq 0$ не выполняется ни для какой другой известной нам модели ФМ.)

Этой картины достаточно, чтобы восстановить характер закона дисперсии кинка. Начнем с некой траектории, отвечающей $\varphi = \varphi_{min}$, и будем считать, что для нее $P = 0$. Тогда для магнетика с осью n-го порядка ближайшим двум траекториям с $V = 0$, $\varphi = \varphi_{max}$ будут отвечать значения $P = \pm 2\pi\hbar S/a\, n = \pm P_0/2$. Траекториям, проходящим между сечениями $\varphi = \varphi_{min}$ и $\varphi = \varphi_{max}$, отвечает $V \neq 0$. В частности, некоторым двум траекториям (неплоским) отвечают значения скорости $\pm V_c$, V_c – максимальное значение скорости кинка (предельная скорость). Траектории с $V = V_c$ можно достичь, идя от обоих решений с $V = 0$ (выгодных и невыгодных). Таким образом, как и для уокеровского решения, зависимость $E(V)$ имеет две ветви с большей и меньшей энергией, которые сливаются в точке $V = V_c$. Если считать, что $P = 0$ для кинка с $V = 0$, $\varphi = \varphi_{min}$, значения импульса при увеличении скорости кинка до значений $\pm V_c$ меняются до величин $P = \pm P_c$, $P_c < 2\pi\hbar S/an$. В дальнейшем, при переходе на верхнюю ветвь зависимости $E(V)$, скорости кинков убывают, а импульсы увеличиваются до величин $P = \pm 2\pi\hbar S/an$ при уменьшении скорости до нуля. При выходе за пределы области, обсуждаемой выше, значение импульса P растет, а энергия кинка снова принимает те же значения, то есть мы реально получаем периодическую зависимость $E(P)$ с периодом P_0, который зависит только от значения спина системы S и порядка главной оси n,

$$P_0 = 4\pi\hbar S/an. \tag{9}$$

Аналогично могут быть рассмотрены и другие модели ФМ. Например, для ромбоэдрических магнетиков в выражении для W_r присутствует инвариант $\cos\theta\cos 3\varphi$. В этом случае даже при $V = 0$ разворот $\mathbf{m}$ в кинке неплоский. Однако периодичность $E(P)$ в этом случае сохраняется, а период P_0 определяется формулой (9) с $n = 6$.

Может показаться, что неподвижный кинк с бóльшей энергией ($\varphi = \varphi_{max}$) неустойчив относительно перехода в выгодный кинк с $\varphi = \varphi_{min}$. Однако проведенный анализ показал, что этим состояниям соответствуют различные значения импульса, переход невозможен, и в одномерном случае оба кинка устойчивы. Для точно решаемой модели Уокера известно, что оба статических кинка, имеющие как минимальную, так и максимальную энергии, стабильны [3] (подчеркнем, что речь идет только об одномерных моделях, плоский невыгодный кинк (стенка Нееля) в трехмерном ФМ нестабилен при учете неодномерных возбуждений [3]).

4. Известны и другие модели магнетиков, содержащие в лагранжиане слагаемые, линейные по $\partial\theta/\partial t$, $\partial\varphi/\partial t$. Примером является σ-модель для антиферромагнетиков (АФМ) во внешнем магнитном поле или при учете взаимодействия Дзялошинского $D_{ik}l_i m_k$ с $D_{ik} \neq \epsilon_{ikj}d_j$; здесь $\mathbf{m}$ и $\mathbf{l}$ – векторы намагниченности и антиферромагнетизма, см. [2, 6]. Но в этом случае структура лагранжиана такова, что поток соответствующего вектора $\mathbf{B}$ через всю поверхность сферы $\mathbf{l}^2 = 1$ равен нулю при любой ориентации внешнего поля или любом D_{ik} [6]. Поэтому топологических особенностей нет, и периодическая зависимость $E(P)$ для АФМ не реализуется. В то же время, для кинков в ферримагнетиках, содержащих два различных спина S_1 и S_2 с АФМ взаимодействием, функция $E(P)$ периодична с периодом P_0, получающимся из (9) заменой S на $|S_1 - S_2|$.

5. Таким образом, в силу топологических свойств лагранжиана поля намагниченности, для широкого класса магнетиков закон дисперсии кинков $E(P)$ является периодическим. Это должно приводить к особенностям вынужденного движения кинка, например, осциллирующему движению кинка (блоховские осцилляции [7]) под действием постоянной силы, в частности, магнитного поля, параллельного легкой оси ФМ.

Работа частично поддержана грантами Volkswagen-Stiftung, FRG; ФФИ Украины 2.4./561 (Е.Г.) и 2.4./27 (Б.И.).

---

1. H.-J.Mikeska and M.Steiner, Adv. Phys. **40**, 191 (1991).
2. V.G.Bar'yakhtar and B.A.Ivanov, *Soliton thermodynamics of low-dimensional magnets*, Ed. I.M.Khalatnikov, Sov. Sci. Revs, Sec. A. – Phys. **16**, 1 (1993).
3. A.M.Kosevich, B.A.Ivanov, and A.S.Kovalev, Phys. Rep. **194**, 117 (1990).
4. E.Fradkin, *Field theories of condensed matter systems*, in Frontiers in Physics, **82**, Addison – Wesley, New York, 1991.
5. N.Papanicolaou and T.N.Tomaras, Nucl. Phys. **B360**, 425 (1991).
6. B.A.Ivanov, *Instantons for nonlinear sigma-model with broken Lorentz-invariance*, Proc. of the 6-th Intern. Conf. on Path-Integrals from peV to TeV, Eds. R.Casalbuoni et al., World Scientific, Singapore, 1998, p.410.
7. J.Kyriakidis and D.Loss, Phys. Rev. **B58**, 5568 (1998).