

ЛОВУШКА С БОЗЕ-КОНДЕНСАТОМ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Д.Баранов, В.Ярунин¹⁾Объединенный институт ядерных исследований
141980 Дубна, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 15 июня 1999 г.

После переработки 21 февраля 2000 г.

Рассмотрена бозе-конденсация атомов в 1D и 2D параболической конечной ловушке, помещенной в гравитационное поле. Деформация потенциала ловушки в этом поле моделируется комбинацией двух прямоугольных 1D и 2D ловушек, для которых найдено изменение критической температуры T_c с учетом обрезания и перенормировки спектра. Вычисляется сдвиг критической температуры T_c гравитационным полем. Знак и величина сдвига зависят от способа введения гравитационного поля. При определенном выборе можно описать последовательное наблюдение трех критических температур. Эти температуры сопоставляются трем бозе-конденсациям, происходящим при циклическом движении ловушки по схеме (I) Земля – (II) Космос – (III) Земля.

PACS: 05.70.Jk, 67.40.-w

За последние десять лет были обнаружены новые эффекты в поведении критической температуры бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) T_c . Известно, что критическая температура T_c сверхтекучего ^4He (самого старого – хотя и косвенно – примера БЭК) остается той же самой для любого резервуара с жидким гелием. Уменьшение T_c жидкого ^4He в пористых стеклах было найдено экспериментально [1] и объяснено теоретически [2, 3]. Этот сдвиг зависит от параметров пористых стекол [4]. Между тем вычисления БЭК T_c в бесконечном объеме для бозонов со слабым взаимодействием показали, что T_c увеличивается [5, 6].

Что касается идеального газа, в работе [7] было показано, что во внешнем поле, ограничивающем атомы, T_c зависит от формы этого поля. Экспериментальное открытие БЭК для атомов щелочных металлов в магнитных ловушках [8, 9] предоставило хорошую возможность обсудить эти же свойства для систем в конечных объемах. Конечность объема предполагает наличие мезоскопических граничных условий, которые приводят к новой формулировке термодинамического предела в теории [10]. Уменьшение БЭК T_c идеального газа обнаружено [11] как поправка за счет конечного объема $N \sim \infty \rightarrow N < \infty$ при вычислении с использованием “ловушечной версии” термодинамического предела $\hbar\omega/T \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$.

Мы найдем изменение критической температуры T_c БЭК, обусловленное влиянием гравитационного поля на газ в ловушке. Проблема изучения влияния гравитационного поля на критическую температуру ^4He возникла в связи с исследованиями его в космосе и такими же исследованиями для БЭК газов в ловушках, планируемыми в ближайшем будущем [12]. Представляется интересным предсказать теоретически вклад гравитационного поля в критическую температуру БЭК в ловушках. Будет рассмотрена теория бесспиновых невзаимодействующих атомов в конечном объеме в 1D и 2D системах. Основные параметры взяты из экспериментов по наблюдению БЭК в атомах щелочных металлов [8,9]. Начнем с изотропной параболической

¹⁾ e-mail: yarunin@thsun1.jinr.dubna.ru

ловушки с потенциальным барьером U_0 , частотой ω и высотой h , а влияние гравитационного поля опишем с помощью введения двух прямоугольных ловушек.

Потенциалы ловушки различаются для случаев нулевого и не нулевого гравитационного поля в направлении оси z . Потенциал поля внутри ловушки (рис.1) может быть записан в виде

$$U(z) = U_g + (m\omega^2/2)(z + \Delta)^2, \quad -h/2 < z < h/2, \quad \Delta = g/\omega^2, \quad (1)$$

где m – масса атома, g – гравитационная константа. Пунктирная линия описывает исходный потенциал параболической ловушки, а сплошная линия – потенциал параболической ловушки, искаженный гравитационным полем. Гравитационное поле смещает минимум потенциала ловушки на величину Δ влево от ее центра $z = 0$ и вниз на величину $U_g = -mg^2/2\omega^2$. Разность между новыми (смещенными) потенциалами барьеров U_+ (справа) и U_- (слева),

$$U_{\pm} = \frac{m\omega^2}{2} \left(\Delta \pm \frac{h}{2} \right)^2 + U_g, \quad U_0 - U_- = U_+ - U_0 = \frac{1}{2}mgh,$$

равна mgh . Из приведенных формул следует, что условие макроскопической стабильности ловушки в поле тяжести $2g < \omega^2 h$ выполнено в экспериментах [8,9] и будет удовлетворяться для частот ловушки более 100 Hz. При этом квантовая динамика атомов подвергается непертурбативному гравитационному возмущению из-за большого сдвига потенциала ловушки $U_g \gg \hbar\omega$ по сравнению с ее частотой.

Одночастичные собственные функции бозонов u_n и их энергии $\epsilon_n > 0$ в 2D системах для $r = \{x, z\}$, $u_n(r) = u_{n_x}(x)u_{n_z}(z)$, $n = \{n_x, n_z\}$

$$\left\{ \nabla^2 + \frac{2m}{\hbar^2} [\epsilon_n - U(r)] \right\} u_n = 0, \quad \epsilon_n = \frac{1}{2m} \int \nabla u_n \nabla u_n dr + \int U(r) u_n u_n dr, \quad (2)$$

являются отправными точками квантового анализа любой конечной ловушки $U(r)$, основное состояние которой $\epsilon_0 \neq 0$. Для введения статистики Гиббса используем аппарат интегралов по траекториям, применявшийся ранее [13, 14] для описания БЭК взаимодействующих бозонов.

Система из N бозонов (2), заключенных в объеме V , может быть описана с помощью гамильтониановой функции H :

$$\hat{H} \rightarrow H = \int dr \left[\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \psi^*(r, t) \nabla \psi(r, t)) + \psi^* U(r) \psi \right].$$

Здесь ψ^* , ψ – траектории с периодическими граничными условиями $[0, \beta]$. Следуя [15, 16], разделим для $T < T_c$ эти траектории на “медленные” b_0^* , b_0 и “быстрые” b_n^* , b_n , $n \neq 0$,

$$\psi^*(r, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\sum_{n \neq 0} b_n^*(t) u_n(r) + b_0^*(t) u_0(r) \right), \quad |b_0| = \sqrt{N_0} \gg 1,$$

так что функция $N_0(t)$ представляет собой долю “бозе-конденсатных” частиц теории Боголюбова [15] в терминах функционального интеграла. “Нарушение градиентной инвариантности” известно как свойство бозе-газа с выделенной подсистемой конденсатных частиц, однако, квазиклассический интеграл движения $\bar{N} = N_0 + \bar{N}_1$ для

системы (2) может быть записан в виде уравнения [13]

$$d\bar{N}/dt \equiv \{\hat{H}, N_0\} + i[\hat{H}, \hat{N}_1] = 0, \quad \hat{N}_1 = \sum_{n \neq 0} b_n^+ b_n, \quad (3)$$

где N_1 – число надконденсатных бозонов, $\{, \}$ – скобка Пуассона для классических амплитуд b_0, b_0^* , $[,]$ – квантовый коммутатор операторов b_n^+, b_n , и $n, n' \neq 0$. Действие S с кинетическим слагаемым K для случая N невзаимодействующих бозонов в произвольном объеме V записывается в виде

$$S = \int_0^\beta (K - H) dt = - \int_0^\beta \left[b_0^* \frac{db_0}{dt} + \varepsilon_0 b_0^* b_0 + \sum_{n \neq 0} \left(b_n^* \frac{db_n}{dt} + \varepsilon_n b_n^* b_n \right) \right] dt.$$

Эффективное действие $S_{ef}(\rho, \mu)$ для плотности конденсата $\rho = N_0/V$ и химического потенциала μ определяется через выражение для статистической суммы с условием связи

$$Q = \int e^{S_{ef}(\rho, \mu)} d\rho d\mu = \text{Sp} [\exp(-\beta H) \delta_{R, R_1 + \rho}], \quad R = N/V, \quad R_1 = N_1/V.$$

Уравнение (3) служит для определения химического потенциала μ . Используя представление Фурье для $\delta_{R, R_1 + \rho}$ при $\mu = iy/\beta$, записываем статистическую сумму в виде интеграла по переменной y и функционального интеграла по “медленным” b_0, b_0^* и “быстрым” b_n, b_n^* , траекториям с периодическими граничными условиями на отрезке $[0, \beta]$. Вычисление статистической суммы Q по “быстрым” переменным приводит к эффективному действию S_{ef} для бозе-конденсата:

$$S_{ef} = \int_0^\beta \left[-b_0^* \frac{db_0}{dt} + \rho(\mu - \varepsilon_0) - \mu R \right] dt - \sum_{n \neq 0} \ln(1 - \exp[-\beta(\varepsilon_n - \mu)]).$$

Вариационные уравнения $\delta S_{ef}(b_0, b_0^*, \mu) = 0$ записываются в виде

$$\frac{\partial S_{ef}}{\partial \mu} = \rho + \frac{1}{V} \Sigma - R = 0, \quad \Sigma = \sum_{n_x, n_z \neq 0} f(\varepsilon_{n_x, n_z}, \beta, \mu), \quad (4)$$

$$f(\varepsilon_{n_x, n_z}, \beta, \mu) \equiv f = \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_n - \mu)] - 1}, \quad n = \{n_x, n_z\},$$

$$\frac{\partial S_{ef}}{\partial b_0^*} = -\frac{db_0}{dt} - b_0(\varepsilon_0 - \mu) = -Lb_0 = 0, \quad \mu = \varepsilon_0 - kT \ln \left(1 + \frac{1}{N_0} \right). \quad (5)$$

Уравнения (4), (5) определяют БЭК решения модели (2), (3) ниже критической температуры для случая трансляционно-неинвариантных систем. Итак, критическая температура T_c для ловушки конечного размера определяется из уравнения $\Sigma(T_c) = N, \rho = 0$, в то время как для температур $T \sim 0$ выполняются условия $\rho \sim R, R_1 \sim 0, \mu \sim \varepsilon_0$. Формулы (3)–(5) верны для любой ловушки $U(r)$. Мы применим их в формулах (6)–(8) для параболической ловушки.

Наблюдение сдвига критической температуры T_c БЭК является наилучшим способом обнаружения мезоскопических эффектов в ловушке. Из рис.1 очевидно, что конечный размер параболической ловушки h проявляется в следующих мезоскопических явлениях:

(i) в конечном числе уровней $n_{max} = U_0/\hbar\omega$ исходной симметричной параболической ловушки;

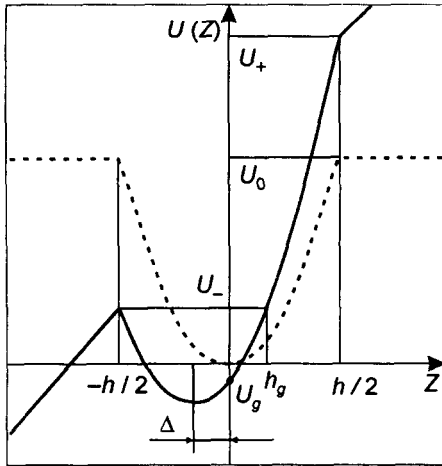


Рис.1. Пунктирная и сплошная линии описывают потенциалы параболических ловушек в вакууме (U_0) и в гравитационном поле (U_-, U_+)

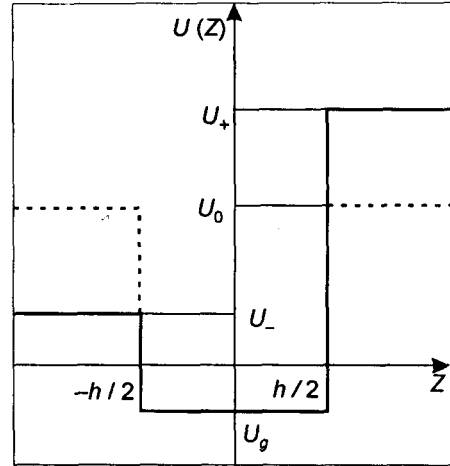


Рис.2. Пунктирная и сплошная линии описывают потенциалы прямоугольных ловушек, моделирующих параболическую ловушку в вакууме (U_0) и в гравитационном поле (U_-, U_+)

(ii) в понижении величины потенциального барьера слева $U_0 \rightarrow (U_- - U_g) < U_0$ под действием гравитационного поля. Перенормировка одночастичных матричных элементов ϵ_n должна быть учтена в обоих случаях. Это означает, что мы должны:

(i) обрезать верхний предел $n < n_{max}$ для барьера U_0 и вычислить энергии ϵ_n^0 ;

(ii) обрезать верхний предел в (2) для барьера U_- и вычислить энергии ϵ_n^\pm . Таким образом, дальнейшие вычисления будут выполнены с использованием формулы

$$N = N_0 + N_1, \quad N_1 = \sum_{n \neq 0}^{n_{max}} f_n, \quad \epsilon_n = \begin{cases} \epsilon_n^0, & g = 0, \\ \epsilon_n^\pm, & g \neq 0, \end{cases} \quad n = \{n_x, n_z\} \quad (6)$$

для полного числа N атомов идеального бозе-газа в ловушке. Уровень с номером n_{max} определяет верхнюю границу состояний атомов в ловушке. Численные параметры экспериментов [8,9] для параболической ловушки в изотропном случае могут быть приближенно заданы (рис.1) значениями

$$U_0 \sim 10^{-9} \text{ eV}, \quad h = 2 \text{ mm}, \quad U_+ - U_- = mgh, \quad \omega \sim 10^{-13} \text{ eV}. \quad (7)$$

Предполагаем, что 3D критическая плотность [8,9] $R \sim 10^{14} \text{ sm}^{-3}$ не зависит от времени, поскольку пренебрегаем потерей атомов вследствие охлаждения. Оценка для числа атомов в параболической ловушке объема V в nD случае может быть записана в виде [10]

$$R|_{nD} = N/V, \quad V \sim (m\omega^2/T_c)^{-n/2}, \quad n = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Для упрощения задачи заменим параболическую ловушку прямоугольной (рис.2). Это значит, что мы описываем деформацию параболического потенциала в гравитационном поле как искажение симметричной прямоугольной ловушки с потенциалом U_0 до асимметричной прямоугольной ловушки с барьерами $U_+ - U_- = mgh$. Задача состоит в том, чтобы оценить сдвиг критической температуры при переходе от симметричной прямоугольной ловушки к асимметричной как меру воздействия

гравитационного поля на эффект БЭК. Заметим, что при этом пренебрегается вкладом туннельных эффектов. Величины R в 1D и 2D параболических ловушках равны 10^5 см^{-1} и 10^{10} см^{-2} в соответствии с формулой (8). Мы оставляем эти значения R такими же для прямоугольных ловушек. Таким образом, число атомов в 1D и 2D прямоугольных ловушках равно $N_{1|1D} \sim 10^5 \text{ см}^{-1} \times 0.2 \text{ см} \sim 2 \cdot 10^4$ и $N_{1|2D} \sim 10^{10} \text{ см}^{-2} \times (0.2 \text{ см})^2 \sim 4 \cdot 10^8$, соответственно. Уравнения для спектра $\varepsilon_n \rightarrow E_k$ симметричной 1D и 2D ловушки записывается в виде [17] при $k = \{k_x, k_z\}$

$$\text{tg}(kh) = \frac{2k\hbar}{p_k^0} \left[\frac{k^2 \hbar^2}{(p_k^0)^2} - 1 \right]^{-1}, \quad E_k = \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_z^2)}{2m}, \quad p_k^0 = \sqrt{2m(U_0 - E_k)},$$

и для асимметричной (деформированной) ловушки при $k = k_x$ имеет вид

$$\text{tg}(kh) = k\hbar \left(\frac{1}{p_k^+} + \frac{1}{p_k^-} \right) \left(\frac{k^2 \hbar^2}{p_k^+ p_k^-} - 1 \right)^{-1}, \quad p_k^\pm = \sqrt{2m(U_\pm - E_k)}.$$

Расстояние между уровнями энергии E_k исходной прямоугольной ловушки для заданных параметров (7) равно $\sim 10^{-19} \text{ eV}$ в нижней части спектра и $\sim 10^{-13} \text{ eV}$ у верхней границы U_0 . Ловушка содержит $\sim 10^5$ уровней ($\sim 10^4$ в экспериментах [8, 9]), так что среднее расстояние между уровнями $\sim 7 \cdot 10^{-14} \text{ eV}$ равно частоте $\hbar\omega \sim 6 \cdot 10^{-14} \text{ eV}$ параболической ловушки.

Для того чтобы получить более систематическую картину явления, начнем с 1D случая при плотности атомов $R \sim 10^5 \text{ см}^{-1}$. Критическая температура $T_c^0|_{1D} = 2.41 \cdot 10^{-10} \text{ K}$ исходной прямоугольной ловушки U_0 определяется из уравнения (6) с использованием вычисленных значений спектра E_k :

$$N_0 = 0, \quad N_1^0|_{1D} = N|_{1D} = \sum_{k_x \neq 0} f(T_c^0|_{1D}, E_{k_x}^0) = 2 \cdot 10^4, \quad k < k_{max}.$$

Приемлемая точность вычислений может быть достигнута для значений $k_{max} \sim 1000$ в последней сумме по переменной k_x . Деформированная прямоугольная ловушка $U_- \sim 10^{-8} U_0$ определяется значениями параметров h и $U_+ - U_- = mgh$ в формуле (7). Она содержит только ~ 10 уровней, на которых находится

$$N_1^\pm|_{1D} = \sum_{k_x \neq 0}^{10} f(T_c^\pm|_{1D}, E_{k_x}^0) = 1.8 \cdot 10^4 < N|_{1D}$$

атомов. Эти атомы претерпевают новый БЭК переход в системе с перенормированными уровнями энергии при критической температуре в деформированной ловушке $T_c^\pm|_{1D} = 2.27 \cdot 10^{-10}$, которая находится из уравнения

$$N_0 = 0, \quad N_1^\pm|_{1D} = \sum_{k_x \neq 0}^{10} f(T_c^\pm|_{1D}, E_{k_x}^\pm) = 1.8 \cdot 10^4, \quad k < k_{max}.$$

Таким образом, сдвиг критической температуры равен $\Delta(T_c)|_{1D} = T_c^\pm|_{1D} - T_c^0|_{1D} = -0.14 \cdot 10^{-10}$. Оставшаяся часть атомов $0.2 \cdot 10^4$ покидает ловушку (непрерывный спектр).

Что касается 2D случая, то сумма по переменным k_x, k_z вычисляется с учетом условия ограничения²⁾ $E_k < E(n|_{max})$, $k = \{k_x, k_z\}$. Температура $T^0|_{2D} = 5.05 \cdot$

²⁾ Это условие несущественно для исходной ловушки, но важно в случае деформированной ловушки.

$\cdot 10^{-7}$ К исходной прямоугольной ловушки U_0 определяется из уравнения (6):

$$N_0 = 0, \quad N_1|_{2D} = N|_{2D} = \sum_{k_x, k_z \neq 0} f(T_c^0|_{2D}, E_{k_x, k_z}^0) = 4 \cdot 10^8, \quad k < k_{max}.$$

В последней формуле суммирование проводится по всем значениям переменных статистической суммы, включая значения, соответствующие возможному вырождению уровней. Приемлемая точность вычислений в последней сумме по переменным k_x, k_z достигается при значениях $k_{max} \sim 400$. Деформированная прямоугольная ловушка $U_- \sim 10^{-8}U_0$ содержит ~ 10 уровней, на которых находится

$$N_1^\pm|_{2D} = \sum_{k_x, k_z \neq 0}^{10} f(T_c^0|_{2D}, E_{k_x, k_z}^0) = 0.96 \cdot 10^8 < N|_{2D}$$

атомов. Как и в 1D случае, мы вычисляем температуру перехода в деформированной ловушке из уравнения

$$N_0 = 0, \quad N_1^\pm|_{2D} = \sum_{k_x, k_z \neq 0}^{10} f(T_c^\pm|_{2D}, E_{k_x, k_z}^0).$$

В результате находим, что $T_c^\pm|_{2D} = 5.03 \cdot 10^{-7}$ К, то есть сдвиг критической температуры составляет

$$\Delta(T_c)|_{2D} = T_c^\pm|_{2D} - T_c^0|_{2D} = -0.02 \cdot 10^{-7} \text{ К}. \quad (9)$$

Теперь найдем сдвиг T_c для системы с одинаковым числом частиц, равным, например, $4 \cdot 10^8$ (в 2D случае). Выше было найдено, что значение критической температуры в симметричной ловушке равно $T_c^0|_{2D} = 5.05 \cdot 10^{-7}$ К. Критическая температура асимметричной ловушки $(T_c^\pm|_{2D})^* = 2.02 \cdot 10^{-6}$ К определяется из уравнения

$$N_0 = 0, \quad N_1|_{2D} = N|_{2D} = \sum_{k_x, k_z \neq 0}^{10} f[(T_c^\pm|_{2D})^*, E_{k_x, k_z}^\pm] = 4 \cdot 10^8,$$

$$\Delta(T_c) = (T_c^\pm|_{2D})^* - T_c^0|_{2D} = 1.52 \cdot 10^{-6} \text{ К}. \quad (10)$$

Заметим, что значение $(T_c^\pm|_{2D})^*$ в (10) не совпадает с исходным значением $T_c^\pm|_{2D}$ в (9), потому что уравнения (9) и (10) описывают различные процессы. Этот важный факт будет обсужден в конце статьи.

Приведенные выше вычисления были проведены для прямоугольной ловушки. Исходная параболическая ловушка имеет ту же величину потенциальных барьеров U_\pm с таким же сдвигом $U_+ - U_- = mgh$, но отличается спектром. Можно предположить, что сдвиг критической температуры БЭК в параболической ловушке, обусловленный наличием гравитационного поля, имеет тот же порядок величины, так что имеется качественное согласие между величинами критических температур $T_c^0 \rightarrow T|_{g=0}$, $T_c^\pm \rightarrow T|_{g \neq 0}$ в прямоугольной и параболической ловушках. Однако вклад туннельных эффектов в прямоугольной ловушке не воспроизводится. Как видно из формулы (1), условие макроскопической стабильности параболической ловушки в гравитационном поле выражается неравенством $\omega^2 > 2g/h$. Ясно, что это условие теряет смысл в отсутствие гравитации, а также для ловушки, заданной на всей оси $-\infty < z < \infty$. Эффект конечного размера для случая деформированной прямоугольной ловушки $n_{max} \sim 10$, сопровождающийся наиболее заметным гравитационным

сдвигом T_c , может наблюдаться в параболической ловушке при выполнении условия

$$(\omega^2 \hbar - 2g) \rightarrow +0.$$

Это условие означает, что наибольший сдвиг T_c может наблюдаться непосредственно перед развалом ловушки.

Следует найти соответствие между формулами (9), (10) и возможным передвижением ловушки между Землей и Космосом. Вначале измеряется критическая температура $(T_c^\pm|_{2D})^* = 2.02 \cdot 10^{-6}$ К для $N|_{2D}$ атомов в деформированной ловушке на Земле. Затем ловушка отправляется в Космос. Там фазовый переход происходит в недеформированной ловушке с тем же числом атомов $N|_{2D}$ при температуре $T_c^0|_{2D} = 5.05 \cdot 10^{-7}$ К со сдвигом (10). Если отправить ловушку обратно на Землю, она деформируется, и часть атомов перестанет удерживаться ею. Оставшаяся часть атомов $N_1^\pm|_{2D}$ совершит фазовый переход при температуре $T_c^\pm|_{2D} = 5.03 \cdot 10^{-7}$ К, и произойдет сдвиг на величину (9).

Таким образом, мы имеем три температуры перехода (в одной и той же ловушке!) в трех различных ситуациях I, II, III:

$$(T_c^\pm|_{2D})^* = 2.02 \cdot 10^{-6} \text{ К} \rightarrow T_c^0|_{2D} = 5.05 \cdot 10^{-7} \text{ К} \rightarrow T_c^\pm|_{2D} = 5.03 \cdot 10^{-7} \text{ К},$$

старт на Земле (I) \rightarrow в Космосе (II) \rightarrow финиш на Земле (III).

Такова картина в случае идеального бозе-газа. Знак сдвига критической температуры T_c неидеального газа без учета перенормировки энергетических уровней при переходе I \rightarrow II был найден в [14]. По-видимому, в 3D расчете произойдет увеличение значений критических температур.

Мезоскопическая природа этой задачи состоит в сильной зависимости сдвига T_c от исходных параметров и от способа установления соответствия их экспериментальным данным.

Авторы благодарны Российскому фонду фундаментальных исследований за поддержку проекта #000216672.

1. G.K.S.Wong, P.A.Crowell, H.A.Cho, and J.D.Reppy, Phys. Rev. Lett. **65**, 2410 (1990).
2. K.Huang and H.-F.Meng, Phys. Rev. Lett. **69**, 644 (1992).
3. V.Sa-yakanit, V.Yarunin, and P.Nisameneephong, Phys. Lett. **A237**, 152 (1998).
4. Межд. Симп. по Физ. Низк. Темп., Авг.12-15, 1999, Санкт-Петербург, Россия.
5. K.Huang, cond-mat/9904027 1 Apr 1999.
6. G.Baym, J.-P.Blaziot, and J.Zinn-Justin, cond-mat/9907241 16 Jul 1999.
7. V.Bagnato, D.Pritchard, and D.Kleppner, Phys. Rev. **A35**, 4354 (1987).
8. K.B.Davis, M.O.Mewes, M.R.Andrews et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
9. M.O.Mewes, M.R.Andrews, N.J.van Druten et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 416 (1996).
10. K.Damle, T.Senthil, S.Majumdar, and S.Sachdev, Evrophys. Lett. **36**, 7 (1996).
11. Л.Питаевский, УФН **168**, 641 (1998); cond.mat/9806038 v 2 12 Oct. 1998.
12. Roadmap on "Fundamental Physics in Space", Preprint NASA, JPL 400-808, 4/99.
13. В.Ярунин, ТМФ **96**, 37 (1993); **109**, 295 (1996); V.Yarunin and L.Siurakshina, Physica **A215**, 261 (1995); В.Ярунин, ТМФ **119**, 308 (1999); Физ. Низк. Темп. **24**, 176 (1998).
14. V.Yarunin and D.Baranov. Preprint JINR E17-99-172 (To be publ. in J.Low Temp. Phys., USA, 2000).
15. Н.Н.Боголюбов, Известия АН СССР, сер. физ. **11**, 77 (1947).
16. В.Н.Попов and Л.Д.Фаддеев, ЖЭТФ **4**, 1315 (1964).
17. S.Flugge, *Practical Quantum Mechanics*, v.1, Springer-Verlag, 1971.