Письма в ЖЭТФ, том 71, вып.7, стр.412 - 417 © 2000г. 10 апреля

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ КАРТИНА СУПЕРДИФФУЗИИ

А.И.Олемской[1)]

Сумский государственный университет
40007 Сумы, Украина

Поступила в редакцию 23 февраля 2000 г.

В предположении о медленной эволюции кластерной структуры положений блуждающей частицы получено кинетическое уравнение, согласно которому на мезоскопических интервалах времени выполняется закон Леви, а на макроскопических система стремится к обобщенному распределению Цаллиса. Найдены асимптотики временны́х зависимостей характерного масштаба иерархии и распределения вероятности по иерархическим уровням.

PACS: 5.20.Db, 5.40.+j, 64.40.Ak

Стохастические процессы переноса представляют, как известно [1], обобщение процесса диффузии, которое выражается в переходе от обычной корневой зависимости к соотношению

$$\langle \mathbf{r}^2 \rangle \propto t^{2/z}, \tag{1}$$

характеризуемому динамическим показателем $z \neq 2$ (здесь $\mathbf{r}$ – координата блуждающей частицы, t – время). При субдиффузии наличие ловушек приводит к расходимости среднего времени ожидания скачков $\langle t \rangle = \infty$, благодаря чему последние приобретают дискретный характер в пространстве и происходит замедление процесса переноса ($z > 2$). Его убыстрение ($z < 2$) в процессе супердиффузии Леви (Lévy flights) связано с тем, что частица в дискретные моменты времени совершает скачки произвольной длины, характеризуемые расходящимся среднеквадратичным смещением $\langle \mathbf{x}^2 \rangle = \infty$.

Замечательная особенность процесса супердиффузии состоит в том, что последовательные положения блуждающей частицы образуют кластерную структуру, представляющую фрактальное множество, размерность которого сводится к показателю z (см. [2]). Поскольку фрактал образуется в результате иерархического построения, то можно полагать, что поведение стохастической системы определяется не только смещением частицы в прямом пространстве, но и намного более медленной эволюцией кластеров ее последовательных положений (последняя, как известно, сводится к диффузии по узлам иерархического дерева, изображающего ультраметрическое пространство).

Предлагаемая работа посвящена описанию процесса супердиффузии как случайных блужданий в прямом и ультраметрическом пространствах. На основании обобщенного уравнения Фоккера – Планка будет показано, что на мезоскопических интервалах времени, в течение которых не происходит заметных изменений кластерной структуры, положения частицы распределены по обычному закону Леви. Подобно замедленной релаксации спиновых стекол на макроскопических временах следует ожидать, что на пути к стационарному распределению положений частицы кластерная структура претерпевает заметные изменения. Учет этого обстоятельства приво-

[1)] e-mail: olemskoi@ssu.sumy.ua

дит к асимптотическому распределению в форме Цаллиса, которое, в свою очередь, отвечает верхнему уровню распределения по кластерам положений частицы [3].

Приведем сначала сведения, необходимые для описания супердиффузии в пренебрежении кластерной структурой [4]. Исходное кинетическое уравнение записывается в форме

$$P(\mathbf{r}, t + \tau_0) - P(\mathbf{r}, t) = \int [f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')P(\mathbf{r}', t) - f(\mathbf{r}', \mathbf{r})P(\mathbf{r}, t)]d\mathbf{r}', \tag{2}$$

где τ_0 – время одного скачка, $f(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – вероятность перехода из точки $\mathbf{r}'$ в $\mathbf{r}$. При $t \gg \tau_0$ левая часть сводится к производной по времени $\dot{P}(\mathbf{r}, t)$, а в правой уместно перейти – в предположении однородности пространства – к интегрированию по смещению $\mathbf{x} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Тогда использование принципа детального равновесия $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ приводит кинетическое уравнение к виду

$$\tau_0 \dot{P}(\mathbf{r}, t) = \int [P(\mathbf{r} + \mathbf{x}, t) - P(\mathbf{r}, t)] f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

С учетом условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$ для пространственных фурье-образов получаем $\tau_0 \dot{P}_\mathbf{k}(t) = -(1 - f_\mathbf{k})P_\mathbf{k}(t)$, где $\mathbf{k}$ – волновой вектор, умноженный на характерный масштаб прямого пространства. В процессах супердиффузии центральную роль играет поведение вероятности переходов на больших расстояниях: $f(\mathbf{x}) \sim |\mathbf{x}|^{-(d+z)}$, d – размерность пространства. В соответствующем пределе $\mathbf{k} \to 0$ множитель $1 - f_\mathbf{k}$ сводится к $D_z|\mathbf{k}|^z$, где D_z – эффективный коэффициент диффузии, явное выражение для которого определяется видом зависимости $f(\mathbf{x})$ (так, при $d = 1$ в [4] найдено $D_z = 2^{-z}\Gamma(1-z/2)/\Gamma(1+z/2)$, где $\Gamma(\xi)$ – гамма-функция). В результате приходим к распределению Леви:

$$P_\mathbf{k}(t) = P_\mathbf{k}(0)\exp(-t/\tau_\mathbf{k}), \quad \tau_\mathbf{k} \equiv D_z^{-1}|\mathbf{k}|^{-z}\tau_0, \tag{3}$$

характеризуемому мезоскопическим временем $\tau_\mathbf{k} \gg \tau_0$. В прямом пространстве соответствующее кинетическое уравнение содержит дробную производную порядка z.

При учете кластерной структуры в кинетическом уравнении (2) плотность вероятности $P_\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и интенсивность переходов $f_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ становятся зависимыми от ультраметрической координаты $\mathbf{u}$ [5]. Для выяснения этой зависимости рассмотрим регулярное иерархическое дерево, характеризуемое фиксированным значением показателя ветвимости $s > 1$ и числом уровней иерархии $n \gg 1$. Тогда ультраметрическая координата $\mathbf{u}$ представляет n-значное число в s-ричной системе счисления: $\mathbf{u} \equiv u_0\ u_1 \dots u_m \dots u_{n-1}$, $u_m = 0, 1, \dots, s-1$ (см. пример на рисунке а). Соответственно, интенсивность переходов записывается в виде степенного ряда

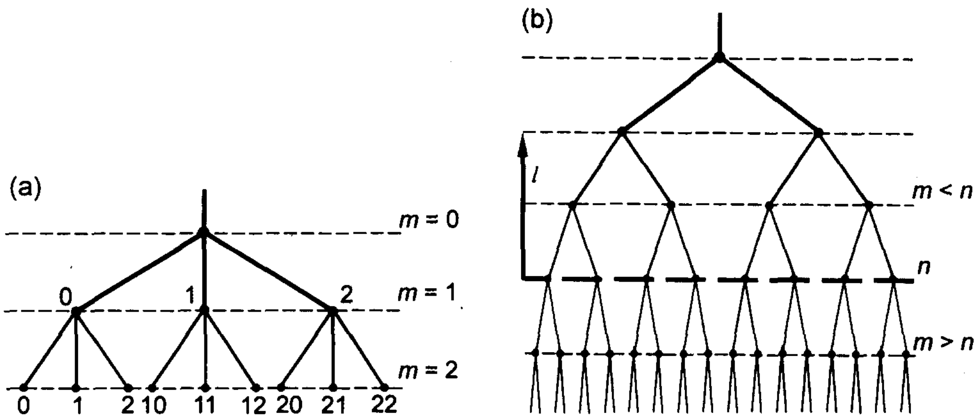
$$f_{\mathbf{u}\mathbf{u}'} = \sum_{m=0}^{n} f(u_m - u'_m)s^{n-m},$$

где первое слагаемое ($m = 0$) отвечает верхнему уровню иерархии, определяющему поведение всей системы, а последнее ($m = n$) – нижнему уровню, соответствующему самым мелким кластерам. По определению, расстояние между точками $\mathbf{u}, \mathbf{u}'$ составляет $0 \le l \le n$, если выполняются условия $u_m = u'_m$ для $m = 0, 1, \dots, n - (l+1)$, но

$u_m \neq u'_m$ для $m = n-1, n-l+1, \ldots, n$ [6]. Поэтому при фиксированном расстоянии l первые $n-l$ слагаемых указанного ряда равны нулю по определению, а последние l содержат множитель s^{n-m}, величина которого в континуальном пределе $s \gg 1$ намного меньше множителя s^l, содержащегося в первом из оставшихся слагаемых. В результате оказывается, что в рассматриваемом степенном ряде лидирующую роль играет единственное слагаемое, отвечающее $m = n - l : f_{\mathbf{uu}'} \sim s^l = s^{n-m}$. Подобным образом можно показать, что плотность вероятности $P_{\mathbf{u}} \sim s^{n-l} = s^m$. При переходе от регулярного дерева к произвольному [7] показатель ветвимости s становится переменной величиной, и согласно приведенным оценкам интенсивность переходов $f_{\mathbf{uu}'} \Rightarrow f(n-m)$ и плотность вероятности $P_{\mathbf{ku}} \Rightarrow P_{\mathbf{k}}(m)$ принимают форму преобразования Меллина:

$$f(n-m) \equiv \int_0^\infty f(s)s^{n-m}ds, \quad P_{\mathbf{k}}(m) \equiv \int_0^\infty P_{\mathbf{k}}(s)s^m ds, \tag{4}$$

где $f(s)$, $P(s)$ – соответствующие весовые функции.



Простейшие иерархические деревья: a) параметризация дерева с показателем ветвимости $s = 3$; b) бифуркационное дерево ($s = 2$)

Кинетическое уравнение, учитывающее кластерную структуру, записывается в виде

$$\tau_{\mathbf{k}}\dot{P}_{\mathbf{k}}(n,t) = \sum_{m>n} f(m-n)P_{\mathbf{k}}(n,t) - \sum_{m<n} f(n-m)P_{\mathbf{k}}(m,t). \tag{5}$$

Здесь первое слагаемое правой части учитывает иерархическую связь между узлами нижних уровней $m > n$ через заданный n, а вычитаемое – связь данного уровня n через верхние $m < n$ (см. рисунок b). При получении уравнения (5) использовано адиабатическое приближение, в рамках которого блуждания частицы совершаются намного быстрее изменения кластерной структуры, характеризуемого макроскопическим временем τ (см. ниже). Раскладывая $P_{\mathbf{k}}(m,t)$ по разности $n - m$, в континуальном пределе $n \gg 1$ с точностью до квадратичного члена получаем

$$\tau_{\mathbf{k}}\dot{P}_{\mathbf{k}}(n,t) = \frac{\partial}{\partial n}\left[F(n)P_{\mathbf{k}}(n,t) - \frac{\partial}{\partial n}D(n)P_{\mathbf{k}}(n,t)\right] + \mathcal{D}P_{\mathbf{k}}(n,t), \tag{6}$$

где введены моменты

$$F(n) \equiv \sum_{m<n} (n-m) f(n-m), \quad 2D(n) \equiv \sum_{m<n} (n-m)^2 f(n-m)$$

и величина

$$\mathcal{D} \equiv \sum_{m>n} f(m-n) - \sum_{m<n} f(n-m), \tag{7}$$

определяющая разность между скоростями установления иерархической связи через нижние и верхние уровни.

Обычно при суммировании по состояниям системы отсутствуют ограничения $m > n$, $m < n$, фигурирующие в (7), и $\mathcal{D} = 0$ [8]. Однако нет никаких оснований принимать такое условие для иерархических систем, где скорость установления связи существенно зависит от того, какими уровнями (нижними или верхними) она обеспечивается. Это обусловлено неоднородностью ультраметрического пространства, которая очевидна уже из его геометрического образа (см. рисунок). Поэтому далее принимается – и это есть основное наше предположение – следующий анзац:

$$\mathcal{D} \equiv -\epsilon q P_{\mathbf{k}}^{q-1}(n,t) \frac{\partial}{\partial n}, \tag{8}$$

где q, ϵ – положительные параметры. Его формальное обоснование состоит в том, что с точностью до множителя $-\epsilon(q-1)$ интеграл $\int \mathcal{D} P dn$ сводится к производной Джексона с показателем $\alpha_q = (q-1) \ln P / \ln q$ [9]. В отличие от обычной производной, отвечающей пределу $q \to 1$, производная Джексона определяет скорость изменения функции $P(n)$ не при сдвиге аргумента $dn \to 0$, а при его дилатации qn, и поэтому является основой анализа самоподобных систем. С физической точки зрения, тот факт, что разность скоростей установления иерархической связи $\mathcal{D}$ зависит от плотности вероятности $P_{\mathbf{k}}(n,t)$, означает наличие нелинейной обратной связи, которая как видно из дальнейшего, и является причиной неаддитивности. Подстановка выражения (8) в (6) приводит к окончательному виду кинетического уравнения супердиффузии:

$$\tau_{\mathbf{k}} \dot{P}_{\mathbf{k}}(n,t) = \frac{\partial}{\partial n} \left\{ [F(n) P_{\mathbf{k}}(n,t) - \epsilon P_{\mathbf{k}}^{q}(n,t)] - \frac{\partial}{\partial n} D(n) P_{\mathbf{k}}(n,t) \right\}. \tag{9}$$

В сравнении с обычными системами [8] обращают на себя внимание противоположные знаки перед диффузионным и линейным дрейфовым слагаемыми, что обусловлено обратным выбором знаков в исходном уравнение (5). Причина такого обращения состоит в том, что автономные иерархические системы (например, бюрократическая) не разрушаются, а самопроизвольно воспроизводятся [7]. Укажем также, что нелинейность уравнения (9) не позволяет использовать преобразование Меллина (4) подобно тому, как это делалось при определении фурье-образа уравнения (2).

Приступая к анализу уравнения (9), рассмотрим сначала случай $F(n) = 0$, $D(n) = \mathrm{const}$, в котором основную роль играет нелинейное дрейфовое слагаемое. Соответствующее стационарное распределение вероятности

$$P(n) = A \left(\frac{D}{\epsilon} + (q-1)(n+1) \right)^{-1/(q-1)}, \quad A \equiv (2-q) \left(\frac{D}{\epsilon} + (q-1) \right)^{(2-q)/(q-1)}, \tag{10}$$

монотонно увеличивается с уменьшением n (увеличением кластера положений блуждающей частицы) и переходит в распределение Цаллиса на верхнем уровне $n = 0$, отвечающем всей системе [3]. Используя обобщенное определение энтропии, легко показать, что при $q \neq 1$ распределение (10) отвечает неаддитивной статистической системе, для которой случаи $q < 1$, $q > 1$ являются равноправными [9]. Из дальнейшего видно, что первый из них отвечает неограниченно нарастающим асимптотикам плотности вероятности, поэтому полагается $q > 1$.

В нестационарном случае аналитическое исследование достигается в автомодельном режиме, когда поведение системы определяется временно́й зависимостью $n_c(t)$ характерного масштаба иерархии, а распределение вероятности представляется однородной функцией $P(n,t) = n_c^{\alpha}(t)\pi(\nu)$, $\nu \equiv n/n_c$ [10]. Если выполняется условие нормировки

$$\int_0^\infty P(n,t)dn = 1,$$

то определяющий вклад вносит дрейфовое слагаемое, обусловленное неоднородностью ультраметрического пространства. Тогда показатель $\alpha = -1$, и автомодельный режим устанавливается при выполнении условия $n_c^{q-1}\dot{n}_c = \mathrm{const} \equiv C/\tau_{\mathbf{k}}$ и уравнения $(\epsilon q\pi^{q-1} - C\nu)\pi' - C\pi = 0$ (здесь и ниже штрих означает дифференцирование по соответствующему аргументу). Решение имеет вид $\pi^{q-1} = (C/\epsilon)\nu$ и реализуется при временах $t \ll \tau_d$, где $\tau_d \equiv (\epsilon^{q-2}/D^{q-1})n^q\tau_{\mathbf{k}}$. При соизмеримости дрейфового и диффузионного вкладов ($t \sim \tau_d$) распределение по иерархическим уровням теряет нормировку [2] и для обеспечения автомодельного режима требуется выполнение условий $\alpha(q-1)+1 = 0$, $n_c\dot{n}_c = C/\tau_{\mathbf{k}}$ и уравнения $D\pi'' + (\epsilon q\pi^{q-1} - C\nu)\pi' + \alpha C\pi = 0$. Здесь решение характеризуется асимптотиками $\pi^{q-1} \to (q-1)^{-1}(D/\epsilon)\nu^{-1}$ при $\nu \to 0$ и $\pi^{q-1} \to (2C/q\epsilon)\nu$ при $\nu \to \infty$. Первая реализуется на больших временах: $t \gg \tau$, $\tau \equiv (n^2/C)\tau_{\mathbf{k}}$, вторая на малых: $t \ll \tau$.

Таким образом, при $F(n) = 0$, $D(n) = \mathrm{const}$ на начальной стадии $t \ll \tau_d$ вклад диффузионного слагаемого пренебрежимо мал, и распределение по уровням нормировано обычным условием. При этом характерный масштаб иерархии возрастает со временем по степенному закону $n_c^q = qC(t/\tau_{\mathbf{k}})$ (становятся существенными все более низкие уровни), а плотность вероятности спадает по гиперболическому: $P^{q-1}(n,t) = (n/q\epsilon)(t/\tau_{\mathbf{k}})^{-1}$ тем быстрее, чем ниже уровень (отсюда следует также $q > 1$). Переход на диффузионную стадию, который ускоряется с повышением уровня, приводит при $\tau_d \sim t \ll \tau$ к трансформации временно́й зависимости $n_c(t)$ к обычному корневому виду: $n_c = \sqrt{2C(t/\tau_{\mathbf{k}})}$, а плотность вероятности спадает по тому же гиперболическому закону. С дальнейшим ростом времени до макроскопических значений $t \gg \tau$ зависимость $n_c(t)$ остается неизменной, а распределение вероятности выходит на асимптотику $P^{q-1}(n) \to (q-1)^{-1}(D/\epsilon)n^{-1}$, отвечающую стационарному распределению (10) при $n \gg D/\epsilon$.

При наличии внешней силы $F(n) = \mathrm{const}$ и мультипликативного шума ($D(n) \neq \neq \mathrm{const}$) указанное поведение реализуется только при малых временах $t \ll n(F - - D')^{-1}\tau_{\mathbf{k}}$. Если же выполняется противоположное условие: $n + (F - D')(t/\tau_{\mathbf{k}}) \gg \gg [\epsilon/(F-D')]^{1/(q-1)}$, то характерный масштаб возрастает по линейному закону $n_c = = C(t/\tau_{\mathbf{k}})$, а вероятность спадает как $P(n,t) = [n + (F - D')(t/\tau_{\mathbf{k}})]^{-1}$. Стационарное распределение принимает экспоненциальную форму $P(n) \propto D^{-1}\exp\{\int(F/D)dn\}$, которая, однако, не означает наличие аддитивности. Действительно, поскольку одна и та же зависимость $D(n)$ определяет процесс диффузии как для всей системы, так и для ее частей, то нарушается условие мультипликативности вероятностей: $P_{1,2}(n) = D(n)P_1(n)P_2(n)$, где индексы указывают на принадлежность к макроскопическим составляющим. Поэтому даже при определении энтропии по Больцману система с мультипликативным шумом не является аддитивной[2)].

Проведенное рассмотрение показывает, что процесс супердиффузии иерархической системы, не подверженной внешнему воздействию ($F = 0$), протекает неаддитивным образом. Такого рода предположение лежит также в основе работ Цаллиса с сотрудниками (см. [9]), однако у них неаддитивность постулируется при определении вероятности переходов $f(\mathbf{x})$ (кроме того, предполагается нелинейность уравнения Фоккера – Планка). В рамках изложенного подхода как нелинейность, так и обусловленная ею неаддитивность являются следствием иерархического строения. Это позволяет сделать вывод, что свободные иерархические системы всегда неаддитивны.

Автора благодарен Константино Цаллису (C.Tsallis) за любезно предоставленную возможность ознакомиться с работами по неаддитивным системам.

1. J.-P.Bouchaud and A.Georges, Phys. Rep. **195**, 127 (1990).
2. D.H.Zanette, Braz. J. Phys. **29**, 108 (1999); cond-mat/9905064.
3. А.И.Олемской, Письма в ЖЭТФ **69**, 391 (1999).
4. К.В.Чукбар, ЖЭТФ **108**, 1875 (1995).
5. R.Rammal, G.Toulouse, and M.A.Virasoro, Rev. Mod. Phys. **58**, 765 (1986).
6. A.I.Olemskoi, *Fractals in Condensed Matter Physics*, in Phys. Rev. **18**, part 1, Eds. I.M.Khalatnikov, Gordon and Breach, London, 1996.
7. A.I.Olemskoi and A.D.Kiselev, Phys. Lett. **A247**, 221 (1998).
8. Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва, 1979.
9. C.Tsallis, *Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Historical background and present status*, in *Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications*, Lecture Notes in Physics, Eds. S.Abe and Y.Okamoto, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
10. А.И.Олемской, УФН **168**, 287 (1998).

[2)] Укажем, что термин “мультипликативный шум” не имеет отношения к свойству мультипликативности соответствующих вероятностей, а отражает тот факт, что его источником являются флуктуации кинетического коэффициента, стоящего перед силой, действующей на систему.