Письма в ЖЭТФ, том 71, вып.8, стр.454 - 459 25 апреля

ЭФФЕКТ КОМПЕНСАЦИИ ВРАЩЕНИЕМ ПЛАЗМЫ СДВИГА МАГНИТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ТОКАМАКЕ

В.И.Ильгисонис[1], *Ю.И.Поздняков*

Российский научный центр "Курчатовский институт"

123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 марта 2000 г.

Рассмотрено равновесие тороидально вращающейся плазмы в аксиально симметричных системах типа токамак. Уравнение равновесия приведено к форме известного уравнения Грэда – Шафранова, в котором давление – в отличие от статического случая – зависит как от метки магнитной поверхности, так и от большого радиуса. Показано, что зависимость давления от большого радиуса позволяет выбором профиля скорости вращения плазмы минимизировать зависимость смещения магнитных поверхностей от величины давления плазмы и, тем самым, рассчитывать на повышение допустимого давления удерживаемой плазмы. Данный результат получен аналитически и проверен на численных расчетах для некоторых типичных конфигураций токамаков с фиксированной границей плазмы.

PACS: 52.30.-q, 52.55.-s

Наиболее продвинутые в настоящее время установки токамак для магнитного удержания высокотемпературной плазмы представляют собой аксиально-симметричные системы (в цилиндрической системе координат $\{r, z, \xi\}$ $\partial/\partial\xi \to 0$) тороидальной топологии, магнитное поле которых образует систему тороидально вложенных поверхностей $\Psi(r,z) = \text{const} : \mathbf{B} \cdot \nabla\Psi = 0$. Теория статического (со средней массовой скоростью плазмы $\mathbf{v} = \mathbf{0}$) равновесия плазмы в токамаке хорошо разработана, см., например, широко известные обзоры [1, 2]. Вместе с тем для адекватного моделирования экспериментов необходимо и в рамках теории равновесия учитывать вращение плазмы, хорошо наблюдаемое на крупных токамаках, особенно в режимах с мощной инжекцией пучков нейтральных атомов. Скорость такого вращения может быть сравнима со звуковой, причем в приосевой области шнура доминирует вращение в тороидальном направлении.

Важность учета вращения при описании стационарных состояний тороидальной плазмы была понята довольно давно, см., например, работы [3 – 5] и ссылки в них. В 80–90-ых годах появилось довольно большое количество работ по равновесию вращающейся плазмы (см., например, [6 – 9] и ссылки в них), что связано отчасти с ключевой ролью вращения для реализации режимов с улучшенным удержанием плазмы.

При наличии вращения общего вида равновесная конфигурация определяется пятью поверхностными функциями в отличие от статического случая, когда таких функций лишь две: давление плазмы $p = p(\Psi)$ и полоидальный ток $I = I(\Psi)$. В данной работе известная свобода в выборе вышеупомянутых функций, а именно профиля скорости тороидального вращения плазмы, используется для минимизации смещения магнитных поверхностей, связанного с давлением плазмы (так называемого "шафрановского сдвига" $\triangle$), по отношению к магнитной оси [10].

[1] e-mail: vil@nfi.kiae.ru

Возникновение такого смещения является проявлением хорошо известного "баллонного" эффекта – преимущественного "распирания" тороидального шнура по большому радиусу при увеличении давления плазмы в шнуре. Эффект шафрановского сдвига ограничивает допустимое значение параметра β в токамаке – отношения давления плазмы к давлению магнитного поля – условием $\triangle \lesssim a_b$, где a_b – характерный малый радиус плазменного шнура. В принципе, ограничение по равновесию наступает зачастую даже раньше, когда при заметных $\triangle$ в плазменной области появляется сепаратриса, вне которой нарушается структура вложенных магнитных поверхностей. В силу этого ясно, что при устранении вышеуказанного смещения, связанного с конечным давлением плазмы, можно рассчитывать на повышение допустимых значений параметра β, что имеет весьма важное значение для задач управляемого термоядерного синтеза.

Будем рассматривать стационарные уравнения магнитной гидродинамики (МГД) в форме

$$\rho\,(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla p + [\,\mathbf{B}\times \operatorname{rot}\mathbf{B}\,] = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}[\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}\,] = 0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \tag{4}$$

$$\mathbf{v}\cdot\nabla S = 0. \tag{5}$$

Для

$$S = p/\rho^{\gamma} \tag{6}$$

уравнение (5) является уравнением адиабаты с показателем γ. Выражение для магнитного поля

$$\mathbf{B} = \nabla\zeta\times\nabla\Psi + I(r,z)\nabla\zeta \tag{7}$$

является общим представлением аксиально-симметричного поля, образующего систему тороидально вложенных поверхностей $\Psi(r,z) = \text{const}$ и удовлетворяющего уравнению (3). В представлении (7) Ψ имеет смысл полоидального магнитного потока. Из (2) следует, что линии течения плазмы также должны лежать на магнитных поверхностях и, следовательно, в соответствии с (5) энтропийная функция S является функцией магнитной поверхности $S = S(\Psi)$.

Ограничив наше рассмотрение случаем чисто тороидального вращения

$$\mathbf{v} = \omega(r,z)r^2\nabla\zeta, \tag{8}$$

получим уравнение равновесия в скалярной форме

$$\Delta^*\Psi + II'_\Psi + r^2\rho(H'_\Psi + r^2\omega\omega'_\Psi - T\eta'_\Psi) = 0, \tag{9}$$

где

$$H(\Psi) = h - \frac{\omega^2 r^2}{2}; \qquad I = I(\Psi), \tag{10}$$

причем I, ω и H оказываются поверхностными функциями, то есть $I(r,z) = I(\Psi(r,z))$ и т.д. Здесь h – энтальпия, через которую в соответствии с термодинамикой, используя (6), можно выразить p и ρ:

$$\rho = \left(\frac{h}{\alpha S}\right)^{\alpha-1}; \quad p = \left(\frac{h}{\alpha S^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}\right)^{\alpha} \qquad \left(\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1} > 1\right). \tag{11}$$

Таким образом, МГД равновесие тороидально вращающейся плазмы определяется четырьмя независимыми "поверхностными" функциями $I = I(\Psi)$, $\omega = \omega(\Psi)$, $H = H(\Psi)$ и $S = S(\Psi)$, где потоковая функция $\Psi(r, z)$ задается уравнением (9), которое можно записать в форме обычного уравнения Грэда – Шафранова:

$$\Delta^* \Psi + II'_{\Psi} + r^2 \frac{\partial p}{\partial \Psi} = 0. \tag{12}$$

В соответствии с (10), (11)

$$p = p(\Psi, r) = \left(\frac{H + \frac{1}{2}\omega^2 r^2}{\alpha S^{(\alpha-1)/\alpha}} \right)^{\alpha}, \tag{13}$$

$$\rho = \rho(\Psi, r) = \left(\frac{H + \frac{1}{2}\omega^2 r^2}{\alpha S} \right)^{\alpha-1}. \tag{14}$$

Замечание. В случае высокой теплопроводности вдоль магнитного поля вместо адиабаты (5) более адекватным условием может быть постоянство температуры вдоль силовых линий, то есть $T = T(\Psi)$. В этом случае, как известно [7],

$$\rho(\Psi, r) = \rho_0(\Psi) \exp\left(\frac{\omega^2 r^2}{2T} \right), \quad p(\Psi, r) = \rho_0(\Psi) T(\Psi) \exp\left(\frac{\omega^2 r^2}{2T} \right), \tag{15}$$

и уравнение равновесия записывается в той же форме (12).

Единственное отличие уравнения (12) от обычного уравнения Грэда – Шафранова состоит в том, что (12) содержит частную производную по Ψ вместо обычной, поскольку при наличии вращения давление больше не является поверхностной функцией, а зависит также явно от r (согласно (13) или (15)), что и будет использовано нами в дальнейшем.

Рассмотрим структуру магнитных поверхностей, описываемых (12), вблизи магнитной оси $r = R$, $z = 0$ в приближении большого аспектного отношения $R/a \gg 1$. Следуя [2], будем работать в приближении почти круглых магнитных поверхностей, задавая их в виде

$$\Psi = \Psi(a): \qquad r \approx R + \Delta(a) - (a - \varepsilon(a)\cos 2\theta - \ldots)\cos\theta, \tag{16}$$

$$z \approx (a - \varepsilon(a)\cos 2\theta - \ldots)\sin\theta,$$

и предполагая следующую иерархию $\Delta(a) \sim a^2/R$, $\varepsilon(a) \sim a(a/R)^2$ и т.д. Левая часть уравнения равновесия (12) представляет собой теперь набор различных гармоник по полоидальному углу θ, которые следует приравнять нулю независимо. В главном порядке по a/R для низших гармоник имеем уравнения:

$$\frac{dJ}{da} = \frac{a}{R} II'_{\Psi} + \frac{a}{R} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial \Psi} \right) \Big|_{r=R}; \tag{17}$$

$$\frac{a}{J} \frac{d}{da} \left(\frac{J^2}{a} \frac{d\Delta(a)}{da} \right) = -\frac{J}{R} - 2a^2 \left(\frac{\partial}{\partial r^2} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial \Psi} \right) \right) \Big|_{r=R}; \tag{18}$$

$$\frac{a}{J} \frac{d}{da} \left(J^2 \frac{\varepsilon'}{a} \right) - 3\frac{J}{a^2}\varepsilon + \frac{3}{2} \frac{d}{da} \left(J \Delta'^2 \right) - J \left(\frac{\Delta'}{R} + \frac{a}{R^2} + \frac{3}{2} \frac{\Delta'^2}{a} \right) -$$

$$-a^2R\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r^2}\left(r^2\frac{\partial P}{\partial \Psi}\right)\right)\right)\Bigg|_{r=R} = 0. \tag{19}$$

Первое уравнение, (17), определяет тороидальный ток $J(a) \approx -a\Psi'/R$, второе, (18), – смещение $\triangle(a)$, третье, (19), – эллиптичность $\varepsilon(a)$ и т.д. Здесь штрихом обозначается дифференцирование по a, так что $(...)'_\Psi = d/d\Psi \approx -a(...)'/RJ$.

Уравнение (18) для смещения интегрируется в виде, аналогичном [2]:

$$\triangle'(a) = -\frac{a}{R}\left(\frac{1}{2}l_i(a) + \tilde{\beta}_J(a)\right), \tag{20}$$

где

$$l_i(a) = \frac{2}{J^2(a)}\int\limits_0^a \frac{J^2(x)}{x}dx,$$

$$\tilde{\beta}_J(a) = \frac{4}{J^2(a)}\int\limits_0^a \left[\left(p(R,x) + R^2\frac{\partial p}{\partial r^2}(r,x)\Big|_{r=R}\right) - \left(p(R,a) + R^2\frac{\partial p}{\partial r^2}(r,a)\Big|_{r=R}\right)\right] x\,dx. \tag{21}$$

Как нетрудно видеть, зависимость смещения магнитных поверхностей от давления определяется, согласно (20), величиной $\tilde{\beta}_J$. В отсутствие вращения $(\partial/\partial r^2)(r^2\partial p/\partial\Psi) \to p'$ и

$$\tilde{\beta}_J \to \beta_J = \frac{4}{J^2}\int\limits_0^a (p(x) - p(a))x dx,$$

что заведомо отлично от нуля для любого профиля давления, спадающего от центра плазменного шнура к его периферии (формально $\beta_J = 0$ при $p(a) = \mathrm{const}$, однако в этом случае на границе плазмы имеется токовый слой, обеспечивающий равновесие, интегральный вклад которого в смещение (20) будет того же порядка). В присутствии же вращения малость $\tilde{\beta}_J$ обеспечивается при постоянстве величины

$$\frac{\partial}{\partial r^2}(r^2 p)\Big|_{r\approx R},$$

что для $p(\Psi, r)$, заданного (13), дает условие

$$\left(\mathcal{F}_1(\Psi) + \mathcal{F}_2(\Psi)R^2\right)^\alpha + \alpha R^2\mathcal{F}_2(\Psi)\left(\mathcal{F}_1(\Psi) + \mathcal{F}_2(\Psi)R^2\right)^{\alpha-1} \approx \mathrm{const} \Rightarrow \tilde{\beta}_J(a) \approx 0\ , \tag{22}$$

где

$$p(\Psi, r) = \left(\mathcal{F}_1(\Psi) + \mathcal{F}_2(\Psi)r^2\right)^\alpha,$$

$$\mathcal{F}_1(\Psi) = \frac{H}{\alpha S^{(\alpha-1)/\alpha}}, \qquad \mathcal{F}_2(\Psi) = \frac{\omega^2}{2\alpha S^{(\alpha-1)/\alpha}}.$$

Будем считать для определенности, что граница плазмы $\Psi(r, z) = \Psi_b$ фиксирована. Это приближение неплохо моделирует реальную экспериментальную ситуацию, причем не только в случае, когда размер удерживаемой плазмы задается производящим кожухом или лимитером. В случае токамака с дивертором положение граничной поверхности (сепаратрисы) хорошо контролируется изменением внешних полоидальных полей. Если давление плазмы обращается в нуль на границе, $p(\Psi_b, r) \approx 0$, то очевидно, что условие (22) не может быть удовлетворено $\forall\Psi$. Однако этого и не требуется, поскольку положение граничной поверхности задано a priori, и скорость вращения плазмы на периферии не так существенна. Шафрановский сдвиг максимален для центральной области шнура, и именно в этой области желательно обеспечить выполнение условия (22) для его минимизации. Разлагая условие (22) по степеням a, можно определить профиль угловой скорости тороидального вращения плазмы, минимизирующий шафрановский сдвиг, по профилю давления или профилю $H(\Psi)$. Обозначая индексом "0" значения величин при $a = 0$, получим связь

$$\mathcal{F}_{20}'R^2 \approx -\mathcal{F}_{10}'\frac{\mathcal{F}_{10} + \alpha R^2\mathcal{F}_{20}}{2\mathcal{F}_{10} + (\alpha+1)R^2\mathcal{F}_{20}}. \tag{23}$$

Как видно, абсолютное значение скорости вращения плазмы в центре шнура несущественно. Условию (23) можно удовлетворить и при отсутствии вращения в центре шнура, то есть при $\mathcal{F}_{20} = 0$. В этом случае производная нарастания скорости вращения задается универсальным соотношением

$$\mathcal{F}_{20}'R^2 \approx -\mathcal{F}_{10}'/2, \tag{24}$$

то есть не зависит ни от $\mathcal{F}_{10}$, ни от α.

Приведем иную интерпретацию формулы (22), задавшись вопросом: до какой скорости надо раскрутить плазму в тороидальном направлении на некотором радиусе $r = r_1$, где давление плазмы $p \approx p_1$, чтобы обеспечить указанный эффект минимизации шафрановского сдвига при неподвижной плазме в центре шнура? Ответ, получаемый путем несложной алгебры, таков:

$$v_1 = (\omega r)_1 \approx c_S\left(\frac{2}{\gamma}\ \frac{p_0 - p_1}{p_1}\right)^{1/2}, \tag{25}$$

где c_S – скорость звука в точке "1".

Справедливость наших умозаключений была проверена на численном счете при помощи кода, рассчитывающего равновесные магнитную и плазменную конфигурации, описываемые (12), (13), в токамаке с фиксированной границей. Не вдаваясь в детали этих расчетов, излишние в краткой заметке, отметим, что эффект практически полного устранения (или заметного ослабления – в 6-8 раз – в конфигурациях с большой эллиптичностью границы) шафрановского сдвига был надежно продемонстрирован даже для случая аспектного отношения ~ 3, то есть даже тогда, когда асимптотическое разложение по a/R должно давать заметную погрешность. При этом предельно допустимое значение параметра β возрастало в 1.6–2.5 раза по сравнению со статическим случаем. Тем самым показано, что описанный нами эффект является довольно "грубым", и мог бы быть обнаружен не только в численном, но и в реальном эксперименте.

Вместе с тем необходимо отметить, что известные аналитические решения уравнения равновесия (9), например, часто цитируемое в литературе решение Машке и Перрина [7], *принципиально* не способны продемонстрировать описанный эффект. Так, использованные в [7] поверхностные функции

$$H(\Psi) \text{ и } \omega(\Psi): \quad \mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2 = \text{const}; \quad \mathcal{F}_{1,2} \sim \Psi^{1/\alpha},$$

выбраны так, чтобы величина $\partial p/\partial\Psi$ была бы функцией только от r. Именно такой выбор позволяет решить уравнение (12) аналитически, но он же заведомо противоречит нашему условию

$$\frac{\partial}{\partial r^2}\left(r^2\frac{\partial p}{\partial\Psi}\right)\approx 0$$

и вытекающим из него следствиям (23), (24). В силу этого становится понятно, почему присутствие вращения в решениях Машке и Перрина и в аналогичных им влияет, как правило, негативно на параметры удерживаемой плазмы.

В заключение суммируем основные выводы нашей работы.

• В случае чисто тороидального вращения плазмы уравнение МГД равновесия имеет вид уравнения Грэда – Шафранова ($dp/d\Psi \;\rightarrow\; \partial p/\partial\Psi$).

• Смещение магнитных поверхностей описывается формулой, аналогичной формуле шафрановского сдвига.

• В отличие от статического случая сдвиг магнитных поверхностей, индуцированный давлением плазмы, может быть существенно снижен (зачастую – устранен) надлежащим выбором профиля скорости вращения; при этом абсолютная величина скорости вращения несущественна.

• Для уменьшения сдвига магнитных поверхностей при спадающем (от центра плазменного шнура к периферии) профиле давления необходимо обеспечить нарастание скорости тороидального вращения плазмы.

• Режимы с уменьшенным сдвигом магнитных поверхностей позволяют достигать бо́льших значений параметра β.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований ведущих научных школ (грант #00-15-96526).

---

1. Л.С.Соловьев, В.Д.Шафранов, в сб.: *Вопросы теории плазмы*, вып.5, М.: Атомиздат, 1967, с.3.
2. Л.Е.Захаров, В.Д.Шафранов, в сб.: *Вопросы теории плазмы*, вып.11, М.: Энергоатомиздат, 1982, с.118.
3. H.Grad, Rev. Mod. Phys. **32**, 830 (1960).
4. H.P.Zehrfeld and B.J. Green, Nucl. Fusion **12**, 569 (1972).
5. А.И.Морозов, Л.С.Соловьев, в сб.: *Вопросы теории плазмы*, вып.8, М.: Атомиздат, 1974, с.3
6. E.Hameiri, Phys. Rev. **A27**, 1259 (1983).
7. E.K.Maschke and H.Perrin, Plasma Phys. **22**, 579 (1980).
8. W.Kerner and S.Tokuda, Z. Naturforsh. **42a**, 1154 (1987).
9. H.Tasso and G. N.Throumoulopous, Phys. Plasmas **5**, 2378 (1998).
10. V.S.Mukhovatov and V.D.Shafranov, Nucl. Fusion, **11**, 605 (1971).