Письма в ЖЭТФ, том 71, вып.9, стр.534 - 538 © 2000г. 10 мая

РАЗВИТИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ: ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Н.М.Зубарев[1)]

Институт электрофизики Уральского отделения РАН
620049 Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 20 марта 2000 г.

Исследована нелинейная динамика развития неустойчивости заряженной поверхности жидкого гелия в пределе больших надкритичностей. Обнаружено, что в случае, когда поверхностный заряд полностью экранирует поле над поверхностью, уравнения трехмерного (3D) потенциального движения жидкости сводятся к известным уравнениям, описывающим процесс 3D лапласовского роста. Интегрируемость этих уравнений в 2D геометрии позволяет аналитически описать эволюцию свободной поверхности вплоть до формирования на ней особенностей – точек заострения.

PACS: 68.10.-m

Известно [1], что плоская заряженная электронами поверхность жидкого гелия неустойчива, если для напряженностей электрического поля над жидкостью, E_+, и в жидкости, E_-, выполняется неравенство: ${E_+}^2 + {E_-}^2 > {E_c}^2 = 8\pi\sqrt{g\alpha\rho}$, где g – ускорение свободного падения, α – коэффициент поверхностного натяжения, а ρ – плотность среды. Из анализа околокритического поведения системы следует, что в зависимости от значения безразмерного параметра $S = ({E_-}^2 - {E_+}^2)/{E_c}^2$ нелинейность либо насыщает линейную неустойчивость, либо, наоборот, приводит к взрывному росту амплитуд. В первом случае возможно формирование возмущенного стационарного рельефа поверхности жидкого гелия (гексагонов [2], многоэлектронных лунок [3]). Подобные структуры подробно исследованы аналитически [4, 5], что связано с возможностью применения в околокритической области теории возмущений по малому параметру – углу наклона поверхности. Для второго случая характерно нарушение малоуглового приближения – кинематографическое исследование развития неустойчивости, проведенное Володиным, Хайкиным и Эдельманом [6], показало, что на поверхности появляются углубления, которые заостряются за конечное время. Существенная нелинейность этих процессов требует создания теоретической модели, не ограниченной условием малости возмущений поверхности; модели, в рамках которой можно было бы рассматривать динамику формирования сингулярного профиля поверхности жидкого гелия. В настоящей работе показано, что такую модель можно построить при выполнении условия $E_- \gg E_+$, что соответствует полной экранировке поля над жидким гелием поверхностным электронным зарядом, а также условия значительного превышения электрическим полем своего критического значения $E_- \gg E_c$.

Рассмотрим потенциальное движение идеальной жидкости (жидкого гелия), занимающей область, ограниченную свободной поверхностью, $z = \eta(x, y, t)$. Будем считать, что характерный пространственный масштаб возмущений поверхности λ мал по сравнению с глубиной жидкости. Кроме того, положим $\alpha E_-^{-2} \ll \lambda \ll {E_-}^2/g\rho$, что позволит не учитывать влияния капиллярных сил и силы тяжести. Потенциал

1) e-mail: nick@ami.uran.ru

электрического поля в среде $\varphi(x,y,z,t)$ и потенциал скорости жидкости $\Phi(x,y,z,t)$ удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0, \qquad \nabla^2\Phi = 0, \tag{1}$$

которые следует решать совместно с условиями на поверхности:

$$\varphi = 0, \quad \eta_t = \Phi_z - \nabla_\perp\eta\cdot\nabla_\perp\Phi, \quad 8\pi\rho\Phi_t + 4\pi\rho(\nabla\Phi)^2 + (\nabla\varphi)^2 = E_-{}^2, \quad z = \eta(x,y,t), \tag{2}$$

а также условиями на бесконечности:

$$\varphi \to -zE_-, \qquad \Phi \to 0, \qquad z \to -\infty. \tag{3}$$

Перейдем к безразмерным обозначениям, приняв λ за единицу длины, E_- за единицу напряженности электрического поля и $\lambda E_-^{-1}(4\pi\rho)^{1/2}$ за единицу времени. Оказывается удобным переписать уравнения движения свободной поверхности $z = \eta(x,y,t)$ в неявной (не содержащей в явном виде функцию η) форме. Введем возмущенный потенциал $\tilde\varphi = \varphi + z$, затухающий на бесконечности. На границе имеем: $\tilde\varphi|_{z=\eta} = \eta$. Отсюда несложно получить следующие соотношения:

$$\eta_t = \left.\frac{\tilde\varphi_t}{1-\tilde\varphi_z}\right|_{z=\eta}, \qquad \nabla_\perp\eta = \left.\frac{\nabla_\perp\tilde\varphi}{1-\tilde\varphi_z}\right|_{z=\eta},$$

позволяющие исключить функцию η из уравнений (2). Кинематическое и динамическое граничные условия при этом принимают вид

$$\tilde\varphi_t - \Phi_z = -\nabla\tilde\varphi\cdot\nabla\Phi, \qquad \Phi_t - \tilde\varphi_z = -(\nabla\Phi)^2/2 - (\nabla\tilde\varphi)^2/2, \qquad z = \eta(x,y,t). \tag{4}$$

Введем в рассмотрение пару вспомогательных потенциалов:

$$\phi^{(\pm)}(x,y,z,t) = (\tilde\varphi \pm \Phi)/2.$$

С их использованием форма поверхности жидкости может быть задана соотношением

$$\eta = \left.(\phi^{(+)} + \phi^{(-)})\right|_{z=\eta}, \tag{5}$$

а уравнения движения (1)–(3) приводятся к следующей симметричной форме:

$$\nabla^2\phi^{(\pm)} = 0, \tag{6}$$

$$\phi_t^{(\pm)} = \pm\phi_z^{(\pm)} \mp (\nabla\phi^{(\pm)})^2, \qquad z = \eta(x,y,t), \tag{7}$$

$$\phi^{(\pm)} \to 0, \qquad z \to -\infty \tag{8}$$

где граничные условия (7) получаются сложением и, соответственно, вычитанием соотношений (4).

Видно, что уравнения движения расщепляются на две системы уравнений для потенциалов $\phi^{(+)}$ и $\phi^{(-)}$, связь между которыми задается неявным уравнением для формы поверхности (5). Принципиальным является то обстоятельство, что эти уравнения совместны с условием $\phi^{(-)} = 0$ либо с условием $\phi^{(+)} = 0$. Несложно заметить, что первое условие соответствует решениям задачи, амплитуда которых нарастает со временем, а второе – не представляющим для нас интереса затухающим решениям.

Итак, при рассмотрении уравнений движения заряженной поверхности жидкого гелия можно выделить нарастающую по t ветвь решений, соответствующую условию $\phi^{(-)} = 0$, или, что то же самое, условию $\varphi + z = \Phi$ (устойчивость этой ветви будет доказана ниже). Наличие функциональной связи между потенциалами позволяет исключить потенциал скорости Φ из исходных уравнений (1)–(3). После перехода в движущуюся систему координат $\{x', y', z'\} = \{x, y, z - t\}$ получим:

$$\nabla^2 \varphi = 0, \tag{9}$$

$$\eta'_t = \partial_n \varphi \sqrt{1 + (\nabla_\perp \eta')^2}, \qquad z' = \eta'(x', y', t), \tag{10}$$

$$\varphi = 0, \qquad z' = \eta'(x', y', t) \tag{11}$$

$$\varphi \to -z', \qquad z' \to -\infty, \tag{12}$$

где $\eta'(x', y', t) = \eta - t$, а ∂_n обозначает нормальную производную. Данные уравнения в явной форме задают движение свободной заряженной поверхности $z' = \eta'(x', y', t)$. Они совпадают с уравнениями, описывающими так называемый процесс лапласовского роста – движение фазовой границы со скоростью, прямо пропорциональной нормальной производной некоторого гармонического скалярного поля (φ в нашем случае). В зависимости от системы, это поле может иметь смысл температуры (задача Стефана в квазистационарном пределе), электростатического потенциала (электролитическое осаждение), давления (течение через пористую среду) и т.д.

Заметим, что описываемое уравнениями (9)–(12) движение границы всегда направлено в сторону жидкости. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ функция η' является однозначной функцией переменных x' и y'. Тогда справедливо неравенство $\eta(x', y', t) \le \eta(x', y', 0)$ при $t > 0$. В исходных обозначениях имеем

$$\eta(x, y, t) \le \eta(x, y, 0) + t \tag{13}$$

при любых x и y. Это условие позволяет доказать устойчивость нарастающей ветви решений рассматриваемой задачи по отношению к малым возмущениям потенциала $\phi^{(-)}$. Понятно, что при малых $\phi^{(-)}$ движение границы целиком определяется влиянием потенциала $\phi^{(+)}$ (в соотношении (5) следует положить $\phi^{(-)} = 0$) и, следовательно, описывается уравнениями (9)–(12). Эволюция потенциала $\phi^{(-)}$ будет задаваться уравнениями (6)–(8), причем в линейном приближении условие на границе принимает простой вид:

$$\phi_t^{(-)} = -\phi_z^{(-)}, \qquad z = \eta(x, y, t).$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ распределение потенциала определялось выражением $\phi^{(-)}|_{t=0} = \phi_0(x, y, z)$, где ϕ_0 – некоторая гармоническая при $z \le \eta(x, y, 0)$ функция, затухающая при $z \to -\infty$. Тогда, как несложно заметить, временная динамика потенциала $\phi^{(-)}$ задается выражением: $\phi^{(-)} = \phi_0(x, y, z - t)$. Это означает, что особенности функции $\phi^{(-)}$ будет сносить по направлению оси z – они будут находиться в области $z > \eta(x, y, 0) + t$. Учитывая неравенство (13), обнаруживаем, что особенности всегда удаляются от границы жидкого гелия $z = \eta(x, y, t)$. Как следствие, возмущение $\phi^{(-)}$ будет релаксировать к нулю, что и требовалось доказать.

Вернемся к анализу динамики развития неустойчивости поверхности жидкого гелия. В 2D случае (считаем, что все величины не зависят от переменной y) система (9)–(12) сводится к известному уравнению лапласовского роста (см., например, [7] и ссылки там):

$$\mathrm{Im}(f_t^* f_w) = 1.$$

Здесь $f = x' + iz'$ – комплексная функция, аналитическая в нижней полуплоскости комплексного переменного $w = \psi - i\varphi$ и удовлетворяющая условию $f \to w$ при $w \to \to \psi - i\infty$. Отметим, что ψ – гармонически сопряженная к φ функция, а условие $\psi = = \mathrm{const}$ задает силовые линии электрического поля в среде. Уравнение лапласовского роста интегрируемо в том смысле, что оно допускает бесконечное число частных решений:

$$f(w) = w - it - i\sum_{n=1}^{N} a_n \ln\left(w - w_n(t)\right) + i\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)\ln\left(w - \tilde{w}(t)\right),$$

где a_n – комплексные постоянные, а $\mathrm{Im}(w_n) > 0$. Последнее слагаемое добавлено для того, чтобы обеспечить выполнение условия $\eta \to 0$ при $|x| \to \infty$. Можно положить $\mathrm{Im}(\tilde{w}) \gg \mathrm{Im}(w_n)$; в таком случае влиянием этого члена на эволюцию поверхности можно пренебречь. Функции $w_n(t)$ при этом задаются следующей системой трансцендентных уравнений:

$$w_n + it + i\sum_{m=1}^{N} a_m^* \ln\left(w_n - w_m^*\right) = C_n,$$

где C_n – произвольные комплексные константы.

Рассмотрим простейшее, соответствующее $N = 1$, решение уравнения лапласовского роста:

$$f(w) = w - it + i\ln(w - ir(t)), \qquad r(t) - \ln r(t) = 1 + t_c - t, \tag{14}$$

где t_c – действительная постоянная, а для действительной функции $r(t)$ справедливо $r(t) \geq 1$. Форма уединенного возмущения, соответствующего (14), задается в параметрическом виде выражениями

$$z(\psi, t) = \ln\sqrt{\psi^2 + r^2(t)}, \qquad x(\psi, t) = \psi - \arctan\left(\psi/r(t)\right). \tag{15}$$

Это решение существует лишь конечное время, приводя в момент $t = t_c$ к формированию особенности на поверхности жидкости – точки возврата первого рода. Действительно, полагая в соотношениях (15) $r = r(t_c) = 1$, получим вблизи особой точки в основном порядке $2z = |3x|^{2/3}$ (см. также [8]). Отметим, что на острие происходит бесконечное усиление напряженности электрического поля: $\partial_n\varphi \sim x_\psi^{-1}\Big|_{\psi=0} \sim 1/\sqrt{t_c - t}$. Скорость движения поверхности также становится бесконечной за конечное время: $\eta_t = z_t|_{\psi=0} \sim 1/\sqrt{t_c - t}$. Важно отметить, что подобное сингулярное решение задачи в основном порядке справедливо и в случае, когда поле над поверхностью не экранируется полностью. Дело в том, что в окрестности особенности условие малости поля над поверхностью по сравнению с полем в жидкости выполняется естественным образом.

Обсудим также влияние капиллярных эффектов. Несложно оценить поверхностное и электростатическое давления вблизи особенности:

$$\alpha R^{-1} \sim \alpha\rho^{1/2}E_-^{-1}(t_c-t)^{-1}, \qquad (\partial_n\varphi)^2 \sim \lambda\rho^{1/2}E_-(t_c-t)^{-1}.$$

Поскольку мы полагали, что $\lambda \gg \alpha E_-^{-2}$, то капиллярные силы не могут конкурировать с электростатическими, и учитывать поверхностные силы на стадии формирования острий не требуется.

Таким образом, нам удалось найти широкий класс точных решений уравнений движения заряженной поверхности жидкого гелия. Примечательно, что полученные решения не ограничены условием малости возмущений поверхности: предлагаемая модель описывает развитие неустойчивости свободной поверхности вплоть до формирования особенностей (точек заострения), подобных наблюдаемым в экспериментах [6].

Автор признателен Е.А.Кузнецову за стимулирующие обсуждения. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 00-02-17428) и INTAS (проект 99-1068).

1. Л.П.Горьков, Д.М.Черникова, ДАН СССР **228**, 829 (1976).
2. M.Wanner and P.Leiderer, Phys. Rev. Lett. **42**, 315 (1979).
3. А.А.Левченко, Е.Теске, Г.В.Колмаков и др., Письма в ЖЭТФ **65**, 547 (1997).
4. В.Б.Шикин, П.Лейдерер, Письма в ЖЭТФ **32**, 439 (1980).
5. В.И.Мельников, С.В.Мешков, ЖЭТФ **81**, 951 (1981); **82**, 1910 (1982).
6. В.П.Володин, М.С.Хайкин, В.С.Эдельман, Письма в ЖЭТФ **26**, 707 (1977).
7. M.B.Mineev-Weinstein and S.P.Dawson, Phys. Rev. **E50**, R24 (1994).
8. S.D.Howison, SIAM J. Appl. Math. **46**, 20 (1986).