Письма в ЖЭТФ, том 70, вып.1, стр.18 - 23

КОЛЛЕКТИВНЫЙ МЕХАНИЗМ ТОРМОЖЕНИЯ В ПЛАЗМЕ И ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕДАННОГО ИМПУЛЬСА

С.Н.Гордиенко

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН
142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Российский научный центр "Курчатовский институт"
123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 12 апреля 1999 г.
После переработки 3 июня 1999 г.

Показано, что нижний предел в кулоновском логарифме определяется коллективным поведением плазмы, а не парными столкновениями с малым прицельным расстоянием. По этой причине предположение о том, что "наибольшая" передача импульса определяется парными соударениями, приводит к завышению в два раза численного коэффициента во втором моменте переданного импульса, т.е. многочастичная природа нижнего предела в кулоновском логарифме затрагивает не только сам логарифм, но и численный коэффициент перед ним. Корректный учет флуктуационных электрических полей с масштабом меньшим или порядка дебаевского радиуса (множественной природы соударений в плазме) приводит к существенным изменениям в физике кулоновских соударений и возникновению нового характерного масштаба в теории плазмы $(r_D r_{min})^{1/2}$, не имеющего аналога в кинетических задачах с не кулоновским потенциалом взаимодействия.

PACS: 52.25.Gj, 52.58.Hm

К настоящему времени проблеме потери импульса и энергии из-за кулоновских столкновений заряженной частицей, движущейся в плазме, посвящено огромное число статей и обзоров (см., например, [1, 2]). Вместе с тем, учет множественного характера рассеяния позволяет выявить ряд новых принципиально важных особенностей процесса передачи импульса частицы плазме. Оказывается, что без учета множественного характера взаимодействия в плазме невозможно не только корректно установить значение величины, стоящей под кулоновским логарифмом, но и правильно вычислить численный множитель перед логарифмом.

1. Рассмотрим статистические свойства приращения импульса частицы с зарядом Z_0 и скоростью v в плазме за промежуток времени τ из-за взаимодействия с другими частицами плазмы. Используемая постановка задачи будет аналогична постановке задачи в работе [3]. Будем изучать такие промежутки времени τ, на которых изменение скорости как самой пробной частицы так и частиц плазмы можно считать малым, то есть на этих временных интервалах движение частиц можно считать равномерным и прямолинейным. Приращение импульса пробной частицы за время τ, как следует из второго закона Ньютона, равно

$$\Delta \mathbf{p}_\tau = Z_0 e \int\limits_t^{t+\tau} \mathbf{E}(t')\, dt', \tag{1}$$

где $\mathbf{E}(t')$ – напряженность электрического поля, создаваемого частицами плазмы, в точке нахождения изучаемой частицы в момент времени t'. Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением лишь таких промежутков времени, на которых движение частиц можно считать равномерным и прямолинейным, то

$$\mathbf{E}(t') = -\sum e\frac{\mathbf{r} + \mathbf{v}(t'-t) - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_i(t'-t)}{|\mathbf{r} + \mathbf{v}(t'-t) - \mathbf{r}_i - \mathbf{v}_i(t'-t)|^3} + \sum Ze\frac{\mathbf{r} + \mathbf{v}(t'-t) - \mathbf{R}_i - \mathbf{V}_i(t'-t)}{|\mathbf{r} + \mathbf{v}(t'-t) - \mathbf{R}_i - \mathbf{V}_i(t'-t)|^3}, \tag{2}$$

где суммирование в первой сумме идет по всем электронам плазмы, а суммирование во второй сумме – по всем ионам плазмы, при этом $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_i$ – координаты и скорость пробной частицы и i-го электрона соответственно в момент времени t, а $\mathbf{R}_i$, $\mathbf{V}_i$ – координаты и скорость i-го иона в момент времени t.

Для характеристической функции (фурье-образа функции распределения), соответствующей случайной величине $\Delta\mathbf{p}_\tau$ можно по определению записать

$$p(\mathbf{u}) = \langle \exp(i(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{p}_\tau))\rangle\,, \tag{3}$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю, а $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ и $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ будет обозначать скалярное и векторное произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, соответственно.

2. Рассматривая плазму в состоянии теплового равновесия и пренебрегая межчастичными корреляциями, то есть учитывая лишь члены нулевого порядка по параметру $e^2n^{1/3}/T$ в статистическом весе, перепишем (3) как

$$p(\mathbf{u}) = \left(\frac{1}{V}\right)^{N_e}\int\left\langle \exp\left[i\left(\mathbf{u}, \int\limits_0^\tau \sum Z_0e^2\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{v}_i)t' - \mathbf{r}_i}{|(\mathbf{v}-\mathbf{v}_i)t' - \mathbf{r}_i|^3}\,dt'\right)\right]\right\rangle_m \prod_{i=1}^{N_e} d\mathbf{r}_i \times$$

$$\times\left(\frac{1}{V}\right)^{N_i}\int\left\langle \exp\left[-i\left(\mathbf{u}, \int\limits_0^\tau \sum ZZ_0e^2\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{v}_i)t' - \mathbf{R}_i}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}_i)t' - \mathbf{R}_i|^3}\,dt'\right)\right]\right\rangle_m \prod_{i=1}^{N_i} d\mathbf{R}_i, \tag{4}$$

где индекс m означает усреднение по максвелловскому распределению, V – объем плазмы, а N_e и N_i – число электронов и ионов, соответственно.

Для явного вычисления характеристической функции введем величины

$$U_e = \int\left[\left\langle \exp\left(i\left(\mathbf{u}, \int\limits_t^{t+\tau} Z_0e^2\frac{\mathbf{r}+\mathbf{v}(t'-t) - \mathbf{v}_i(t'-t)}{|\mathbf{r}+\mathbf{v}(t'-t) - \mathbf{v}_i(t'-t)|^3}\,dt'\right)\right)\right\rangle_m - 1\right]d\mathbf{r}, \tag{5}$$

$$U_i = \int\left[\left\langle \exp\left(-i\left(\mathbf{u}, \int\limits_t^{t+\tau} Z_0Ze^2\frac{\mathbf{r}+\mathbf{v}(t'-t) - \mathbf{V}_i(t'-t)}{|\mathbf{r}+\mathbf{v}(t'-t) - \mathbf{V}_i(t'-t)|^3}\,dt'\right)\right)\right\rangle_m - 1\right]d\mathbf{r}, \tag{6}$$

где (5) – максвелловское усреднение производится по скоростям электронов плазмы $\mathbf{v}_i$, а (6) – по скоростям ионов $\mathbf{V}_i$.

Простые вычисления дают следующее выражение для интересующей нас характеристической функции:

$$p(\mathbf{u}) = \exp(nU_e)\exp(nU_i/Z), \tag{7}$$

3. Перейдем к рассмотрению характеристической функции (7). Будем интересоваться торможением пробной частицы, движущейся со скоростью v. При этом будем изучать функцию распределения $f(\Delta\mathbf{p}_\tau)$ случайной величины $\Delta\mathbf{p}_\tau$ при временах τ, для которых справедливы неравенства

$$B_e = n(v^*\tau)^3 \gg 1 \text{ и } B_i = n(V^*\tau)^3 \gg Z,$$

где $v^* = \max(v, v_T)$ и $V^* = \max(v, V_T)$. При переходе к переменным типа $\mathbf{r}' = \mathbf{r}/v^*\tau$ легко убедиться в том, что величины B_e и B_i являются большими параметрами теории, по которым мы будем строить асимптотическое разложение функции распределения. Поскольку вещественные части показателей экспонент в (7) неположительны, а параметры B_e и B_i велики, то основной вклад в функцию распределения

$$f(\Delta\mathbf{p}_\tau) = \int \exp(-i(\mathbf{u}, \Delta\mathbf{p}_\tau))p(\mathbf{u})\frac{d\mathbf{u}}{(2\pi)^3} \tag{8}$$

дает окрестность той точки пространства $\mathbf{u}$, в которой вещественная часть показателя экспоненты в (7) максимальна. Вклад всего остального пространства $\mathbf{u}$ в функцию распределения экспоненциально мал по сравнению с вкладом указанной окрестности в силу большой величины параметров B_i и B_e. Легко видеть, что вещественная часть показателя экспонент в (7) не положительна, а для нахождения функции распределения необходимо изучить функции U_e и U_i в окрестности точки $\mathbf{u} = 0$. После вычислений с точностью до слагаемых меньшего порядка по большой величине $\ln(1/|\mathbf{u}|)$ находим

$$U_e = \left\langle -\frac{2\pi Z_0^2 e^4 \tau}{|\mathbf{x}|^3}(\mathbf{u}, \mathbf{x})^2 - \frac{\pi Z_0^2 e^4 \tau}{|\mathbf{x}|^3}[\mathbf{u}, \mathbf{x}]^2 \ln\left(\frac{|\mathbf{x}|^6 \tau^2}{e^4 Z_0^2 [\mathbf{u}, \mathbf{x}]^2}\right)\right\rangle_m, \tag{9}$$

$$U_i = \left\langle -\frac{2\pi Z_0^2 Z^2 e^4 \tau}{|\mathbf{X}|^3}(\mathbf{u}, \mathbf{X})^2 - \frac{\pi Z_0^2 Z^2 e^4 \tau}{|\mathbf{X}|^3}[\mathbf{u}, \mathbf{X}]^2 \ln\left(\frac{|\mathbf{X}|^6 \tau^2}{Z^2 Z_0^2 e^4 [\mathbf{u}, \mathbf{X}]^2}\right)\right\rangle_m, \tag{10}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_i$, $\mathbf{X} = \mathbf{v} - \mathbf{V}_i$. Усреднение по максвелловскому распределению по скоростям, обозначаемое угловыми скобками, затрагивает лишь $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$ и никак не влияет на интересующую нас функциональную зависимость от $\mathbf{u}$. Указанное усреднение может быть проведено в явном виде и приведет к появлению в выражениях (9), (10) функции ошибок.

4. Заметим, что так как функции U_e и U_i имеют лишь конечное число гладких производных из-за логарифмической особенности при $\mathbf{u} = 0$, то функция распределения при больших передачах импульса убывает не быстрее, чем степенным образом. Поэтому моменты переданного импульса должны расходиться начиная с некоторого. Ниже мы убедимся, что расходится уже второй момент.

Причина расходимости моментов состоит в том, что при вычислении переданного импульса траектории частиц считались прямыми. Поэтому в том случае, когда частицы пролетают близко друг от друга, возникает большая передача импульса, не имеющая физического смысла. Заметим, что от указанных нефизических передач импульса можно избавиться, если провести вычисления функции распределения с использованием (9), (10) в пределе бесконечно большого кулоновского логарифма Λ. Разъясним это на примере электрона, движущегося в плазме с тепловой скоростью. В этом случае на длине свободного пробега λ_{st} на расстоянии $r_{min} = e^2/T$ от электрона оказывается порядка $r_{min}^2 \lambda_{st} n \sim 1/\Lambda$ частиц, то есть с нефизическими передачами импульса связана дополнительная малость $1/\Lambda$. Следовательно, чтобы избавиться от этих фиктивных передач импульса необходимо сохранять при вычислении лишь члены главного порядка по $1/\Lambda$ (при $\Lambda = +\infty$ прицельные расстояния, ответственные за нефизические передачи импульса просто не успевают сыграть свою роль, так как ни одна частица не оказывается на расстоянии, меньшем r_{min}

от пробной частицы за время свободного пробега). Можно убедиться, что для этого достаточно использовать в выражении (7) вместо U_e и U_i выражения

$$U_e^* = \left\langle -\frac{2\pi Z_0^2 e^4 \tau}{|\mathbf{x}|^3}(\mathbf{u},\mathbf{x})^2 - \frac{\pi Z_0^2 e^4 \tau}{|\mathbf{x}|^3}[\mathbf{u},\mathbf{x}]^2 \ln\left(\frac{|\mathbf{x}|^4\tau^2}{e^4 Z_0^2}\xi_e\right)\right\rangle_m , \tag{11}$$

$$U_i^* = \left\langle -\frac{2\pi Z_0^2 Z^2 e^4 \tau}{|\mathbf{X}|^3}(\mathbf{u},\mathbf{X})^2 - \frac{\pi Z_0^2 Z^2 e^4 \tau}{|\mathbf{X}|^3}[\mathbf{u},\mathbf{X}]^2 \ln\left(\frac{|\mathbf{X}|^4\tau^2}{Z^2 Z_0^2 e^4}\xi_i\right)\right\rangle_m , \tag{12}$$

где $\xi_e = \min\left[A_e, A_e^2/\left(\Delta\mathbf{p}_\tau\right)^2\right]$, $\xi_i = \min\left[A_i, A_i^2/\left(\Delta\mathbf{p}_\tau\right)^2\right]$, где $A_e = \pi Z_0^2 e^4\tau/|\mathbf{x}|$ и $A_i = \pi Z_0^2 Z^2 e^4 \tau/|\mathbf{X}|$.

5. Близкая к гауссовской структура функции распределения (гауссовская функция с деформированным "хвостом"), следующая из (11) и (12), позволяет свести вычисления второго момента переданного импульса к вычислению следа соответствующей матрицы и написать

$$\left\langle(\Delta\mathbf{p}_\tau)^2\right\rangle = 4n\pi Z_0^2 e^4 \tau \left\langle\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right\rangle_m \ln\left(n(v^*\tau)^3\right) + 4n\pi Z Z_0^2 e^4 \tau \left\langle\frac{1}{|\mathbf{X}|}\right\rangle_m \ln\left(n(V^*\tau)^3/Z\right). \tag{13}$$

Чтобы понять качественно новое физическое содержание выражения (13) вычислим второй момент в предположении, что передача импульса, приводящая к искривлению траектории, возникает из-за парных столкновений с малыми прицельными расстояниями. В рамках указанного правдоподобного предположения второй момент вычислен в [3]. Для вычисления второго момента необходимо вычислить вторые производные характеристической функции при $\mathbf{u} = 0$, то есть

$$\left\langle(\Delta\mathbf{p}_\tau)^2\right\rangle = \left.\frac{\partial^2 p(\mathbf{u})}{\partial\mathbf{u}\partial\mathbf{u}}\right|_{\mathbf{u}=0}. \tag{14}$$

Подставляя (7) в (14), находим

$$\left\langle(\Delta\mathbf{p}_\tau)^2\right\rangle = 8\pi Z_0^2 e^4 n\tau \left\langle\frac{1}{|\mathbf{x}|}\int_1^{+\infty}\frac{d\mu}{\mu^2-1}\right\rangle_m + 8\pi Z_0^2 Z e^4 n\tau \left\langle\frac{1}{|\mathbf{X}|}\int_1^{+\infty}\frac{d\mu}{\mu^2-1}\right\rangle_m , \tag{15}$$

Интегралы в (15), возникшие после интегрирования по t', вычислены в эллиптических координатах, связанных с центрами a и b с координатами $(0,0,0)$ и $(0,0,-|\mathbf{x}|\tau)$ в первом и, соответственно, $(0,0,0)$ и $(0,0,-|\mathbf{X}|\tau)$ во втором слагаемом в (15), где $\mu = (r_a + r_b)/2$, $\nu = (r_a - r_b)/2$, а угол ϕ определяется как угол поворота вокруг оси z. Интегрирование по углу ϕ и ν выполняется элементарно, а оставшиеся интегралы по μ указаны в (15). Интегралы в (15) расходятся логарифмически при $\mu = 1$. В рамках сделанного допущения о максимальной передаче импульса из-за парных столкновений с малыми прицельными расстояниями выражение (15) необходимо интегрировать не до $\mu = 1$, а выбрать в качестве нижнего предела значения $\mu_1 = 1 + (r_{min}^{(e)}/|\mathbf{x}|\tau)^2$ и $\mu_2 = 1 + (r_{min}^{(i)}/|\mathbf{X}|\tau)^2$ в первом и втором слагаемых в (15) соответственно, где $r_{min}^{(e)} = Z_0 e^2/\min[Mv^{*2}, m_e v^{*2}]$ и $r_{min}^{(i)} = Z_0 Z e^2/\min[MV^{*2}, m_i V^{*2}]$. Так как именно при таких прицельных расстояниях становятся существенными искривления траекторий сталкивающихся частиц. После указанного изменения нижних пределов находим с логарифмической точностью

$$\left\langle(\Delta\mathbf{p}_\tau)^2\right\rangle_P = 8\pi Z_0^2 e^4 n\tau \left\langle\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right\rangle_m \ln\left(\frac{v^*\tau}{r_{min}^{(e)}}\right) + 8\pi Z Z_0^2 e^4 n \left\langle\frac{1}{|\mathbf{X}|}\right\rangle_m \ln\left(\frac{V^*\tau}{r_{min}^{(i)}}\right), \tag{16}$$

где буква P в качестве нижнего индекса означает, что величина вычислена в приближении парных столкновений.

Обратим внимание на то, что предположение о передаче импульса, приводящей к существенному искривлению траектории, за счет парного лобового столкновения частиц приводит к изменению как структуры кулоновского логарифма, так и множителя перед логарифмом по сравнению с правильным значением (приводит к ошибке в два раза при $\tau \sim 1/\omega_{pe}$ согласно (13) и (16)). Следовательно, траектория заметно искривляется из-за взаимодействия частицы с коллективными электрическими полями, имеющимися в плазме, до того как произойдет парное столкновение с существенной передачей импульса. Таким образом мы показали, что не только верхний, но и нижний предел в кулоновском логарифме определяется рассеянием на коллективных полях плазмы, а не парными столкновениями.

6. Приведем результаты вычислений второго момента с учетом диэлектрической проницаемости плазмы (дебаевского экранирования). В этом случае при $\tau \max[v^*, V^*] \leq r_D$ сохраняются выражения (13) и (16), а при $\tau \min[v^*, V^*] \geq r_D$

$$\left\langle (\Delta \mathbf{p}_\tau)^2 \right\rangle = 4n\pi Z_0^2 e^4 \tau \left\langle \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right\rangle_m \ln\left(n r_D^3\right) + 4n\pi Z Z_0^2 e^4 \tau \left\langle \frac{1}{|\mathbf{X}|} \right\rangle_m \ln\left(n r_D^3 / Z\right), \quad (17)$$

и соответственно

$$\left\langle (\Delta \mathbf{p}_\tau)^2 \right\rangle_P = 8\pi Z_0^2 e^4 n \tau \left\langle \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right\rangle_m \ln\left(\frac{r_D}{r_{min}^{(e)}}\right) + 8\pi Z Z_0^2 e^4 n \left\langle \frac{1}{|\mathbf{X}|} \right\rangle_m \ln\left(\frac{r_D}{r_{min}^{(i)}}\right), \quad (18)$$

где r_D – дебаевский радиус. В данном случае подлогарифмические выражения по существу совпадают, но численный коэффициент перед логарифмом отличается в два раза.

Разумеется правильное значение второго момента переданного импульса можно получить и из (18), соответствующим образом выбирая размер, на котором происходит обрезание расходящихся интегралов в области малых масштабов. Сравнивая (17) и (18) находим, что "обрезание" в (15) необходимо провести при $\lambda_e = \sqrt{1/n r_D}$ и $\lambda_i = Z^{1/2}\lambda_e$ – расстояниях ближайшего подлета электронов и ионов к пробной частице за время пролета ею дебаевского радиуса. Заметим, что масштаб λ_e примерно в $N_D^{1/6}$ раз меньше межчастичного расстояния и в $N_D^{1/2}$ раз больше r_{min}, где $N_D = n r_D^3$ – число частиц в дебаевской сфере.

7. Выражение (18) вытекает из приближения парных соударений [2]. Бинарный подход к описанию взаимодействия, используемый при выводе уравнения Больцмана с короткодействующим потенциалом взаимодействия, предполагает как статистическую независимость частиц, так и возможность выделить промежуток времени Δt, за который пробная частица испытывает не более одного соударения, но который вместе с тем велик по сравнению со временем продолжительности соударения τ_{int}. Однако в плазме τ_{int} зависит от прицельного расстояния r $\tau_{int} \sim r/v^*$ и, скажем, за время одного соударения с $r \sim r_D$ происходит $N_D^{2/3}$ соударений с прицельным расстоянием, меньшим межчастичного расстояния. Таким образом, условия применимости приближения бинарных соударений не выполнены. Иными словами частица успевает сильно изменить свой импульс из-за большого числа соударений с большими прицельными расстояниями еще до того, как начнут играть роль соударения с малыми прицельными расстояниями и большими передачами импульса, что и приводит к возникновению нового характерного размера λ_e. Физический смысл этого становится понятным, если учесть, что для потенциалов межчастичного взаимодействия $U(r) \sim 1/r^k$, $k > 1$ процессы передачи импульса определяются лобовыми столкновениями частиц (малыми прицельными расстояниями), для потенциалов $U(r) \sim 1/r^k$, $k < 1$ передача импульса связана с большими расстояниями, а промежуточный случай $k = 1$ является выделенным.

Интересно также отметить, что рассмотрение методом настоящей работы всюду несингулярных малых по величине потенциалов взаимодействия с конечным радиусом действия r_0 показывает, что в этом случае никакого нового масштаба в задаче типа $\sqrt{1/nr_0}$ в действительности не возникает, хотя соображениями размерности он и не запрещен. Последнее демонстрирует, что несмотря на возможность формальной интерпретации с "наивной" точки зрения, возникший в задаче с кулоновским взаимодействием новый пространственный масштаб имеет глубокий динамический смысл. Новый масштаб λ_e можно также переписать в виде $\lambda_e = (r_D r_{min})^{1/2}$, что, возможно, лучше демонстрирует его связь с физикой кулоновского взаимодействия.

Учет множественного характера рассеяния в плазме изменяет численные значения коэффициентов и в других выражениях, содержащих кулоновский логарифм, например, в выражении для поляризационных потерь в плазме [4]. С этой точки зрения рассмотренная в работе задача является лишь иллюстрацией принципиальной роли мелкомасштабных флуктуационных электрических полей, пренебрежение которыми или переход к бинарному описанию столкновений [1, 2] всякий раз требует обоснования.

Автор выражает искреннюю благодарность С.И.Анисимову и Э.И.Юрченко за обсуждение метода и результатов работы, а также В.Д.Шафранову, разъяснившему значение полученных результатов и предложившему идею и форму настоящей статьи, и В.И.Когану, указавшему на глубокий физический смысл кулоновского логарифма.

1. Трубников, *Вопросы теории плазмы*, вып.1, М.: Госатомиздат, 1961.
2. Д.В.Сивухин, *Вопросы теории плазмы*, вып.4, М.: Госатомиздат, 1964.
3. В.И.Коган, ДАН **135**, 1374 (1960).
4. В.Д.Шафранов, *Вопросы теории плазмы*, вып.3, М.: Госатомиздат, 1963.