Письма в ЖЭТФ, том 70, вып.1, стр.53 - 157 © 1999г. 10 июля

EPR-ЭФФЕКТ И ПРИЧИННОСТЬ

С.Н.Молотков, С.С.Назин

Институт физики твердого тела РАН

142432 Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 25 мая 1999 г.

На простом примере показано, что аппарат квантовой теории поля и требование микропричинности не приводят к запрету полной корреляции результатов измерений двух наблюдателей, разделенных пространственно-подобным интервалом.

PACS: 03.65.Bz, 03.67.-a

Квантовая механика допускает так называемые запутанные состояния (entangled states), которые получили широкую известность после работы Эйнштейна, Подольского и Розена (EPR) [1], в которой рассматривался вопрос о том, является ли описание с помощью волновой функции полным. "Нелокальность" корреляций двух частиц в запутанном состоянии не имеет классического аналога [2]. В нерелятивистской квантовой механике подобная нелокальность приводит к корреляции результатов измерений двух пространственно-разделенных наблюдателей. Поскольку в нерелятивистской физике нет никаких ограничений на скорость распространения взаимодействия, корреляция результатов одновременных измерений двух наблюдателей в пространственно-удаленных точках ничему не противоречит. Отметим также, что статистика измерений над запутанными состояниями приводит к нарушению неравенств Белла [2]. В то же время, специальная теория относительности накладывает ограничение на скорость распространения взаимодействия. Причинно-следственная связь между точками пространства-времени может существовать только в том случае, если они находятся внутри светового конуса (разделены времени-подобным интервалом). Поэтому в квантовой теории поля, на первый взгляд, было бы естественным предположить, что результаты измерений двух наблюдателей, разделенных пространственно-подобным интервалом, не могут быть коррелированными, то есть должны быть статистически независимы. Оказывается, однако, что в действительности в аппарате релятивистской теории нет ограничений на коррелированность результатов измерений в двух точках, разделенных пространственно-подобным интервалом. Дело в том, что такая коррелированность не эквивалентна наличию причинно-следственной связи и не позволяет передавать информацию быстрее скорости света.

Примером запутанного состояния составной системы из двух нерелятивистских частиц является волновая функция типа

$$|\psi\rangle = \int |\mathbf{p}\rangle_1 |-\mathbf{p}\rangle_2 d\mathbf{p} \quad \text{и в координатном представлении} \quad |\psi\rangle = \int |\mathbf{x}\rangle_1 |\mathbf{x}\rangle_2 d\mathbf{x}. \quad (1)$$

В состоянии (1) каждая из частиц не имеет вполне определенного значения импульса (координаты). Определен лишь их суммарный импульс (разность координат), который равен нулю (частицы "находятся" на одинаковом расстоянии от начала координат). Если проводятся измерения координат частиц двумя пространственно-удаленными наблюдателями, то если результат измерения первого дает значение $\mathbf{x}_1$, результат второго с достоверностью равен $\mathbf{x_1}$. Аналогичная ситуация имеет место при измерении импульсов частиц. Если результат измерения первого наблюдателя есть $\mathbf{p_1}$, то результат второго с достоверностью $-\mathbf{p_1}$. Причем измерения, например, координаты могут быть сделаны в один и тот же момент времени в двух точках, разделенных пространственно-подобным интервалом. В этом смысле результаты измерения оказываются "мгновенно" коррелированными.

В релятивистской квантовой теории поля одним из основных постулатов является требование микропричинности, которое формально выражается в равенстве нулю коммутатора двух операторов поля в точках, разделенных пространственно-подобным интервалом [3]. Постулируется, что коммутатор (антикоммутатор) двух операторов поля представляет собой c-числовую функцию

$$[u(\hat{x}), u(\hat{x}')]_{\pm} = iD(\hat{x} - \hat{x}').$$

Важнейшей особенностью $D(\hat{x} - \hat{x}')$-функции является то, что она равна нулю для пространственно-подобных интервалов $(\hat{x}-\hat{x}')^2 = c^2(x^0-x^{0'})^2-|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 < 0$. Последнее трактуется как отсутствие корреляций между значениями полей в двух точках, разделенных пространственно-подобным интервалом (см., например, [4], где не делается различий между коррелированностью и причинно-следственной связью).

Ниже на простом примере будет показано, что аппарат квантовой теории поля допускает корреляции между значениями поля в точках, разделенных пространственно-подобным интервалом. Результат измерения в одной точке может полностью определять исход измерения во второй, и, тем не менее, такая корреляция между двумя исходами измерений не означает наличия причинно-следственной связи между ними. При измерениях над запутанным состоянием поля причинно-следственная связь имеет место, условно говоря, между точкой "рождения" двухчастичного запутанного состояния поля и двумя точками, в которых проводятся измерения. Поэтому нарушение неравенств Белла в экспериментах [5] при измерениях в двух точках, разделенных пространственно-подобным интервалом, над бифотонным состоянием поля, получаемым при параметрической конверсии, не является удивительным. Таким образом, из условия микропричинности не вытекает отсутствие корреляций между физическими величинами, характеризующими состояние поля в двух точках, разделенных пространственно-подобным интервалом.

Амплитуда произвольного состояния поля Φ в фоковском представлении может быть получена как действие операторов рождения поля $u_i^+(\hat{x})_i$ на вакуумное состояние поля Φ_0 [3]:

$$\Phi = \int \ldots \int \tilde{F}(\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_n)\delta(\hat{k}_1^2 - m_1^2)\ldots\delta(\hat{k}_n^2 - m_n^2)u_1^+(\hat{k})_1\ldots u_n^+(\hat{k})_n d\hat{k}_1\ldots\hat{k}_n\Phi_0. \quad (2)$$

Интегрирование в (2) проводится по состояниям, лежащим на массовой поверхности.

В дальнейшем мы будем иметь дело с безмассовыми частицами, например фотонами. На операторы четырехмерного вектор-потенциала $A_n^{\pm}(\hat{x})$ накладываются бозевские коммутационные соотношения [3]

$$[A_n^-(\hat{x}), A_m^+(\hat{x}')]_- = ig^{nm}D_0^-(\hat{x} - \hat{x}'),$$

где g^{nm} – метрический тензор ($g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$), и $D_0^-(\hat{x} - \hat{x}')$ – отрицательно-частотная часть перестановочной функции:

$$D_0^-(\hat{x}) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\hat{k}\delta(\hat{k}^2)\theta(-k^0)\exp(i\hat{k}\hat{x}) = \frac{1}{4\pi}\varepsilon(x^0)\delta(\lambda),$$

$$\varepsilon(x^0) = \theta(x^0) - \theta(-x^0), \quad \lambda^2 = (x^0)^2 - \mathbf{x}^2,$$

которая отлична от нуля и имеет сингулярность на световом конусе. Операторы четырехмерного вектор-потенциала имеют вид

$$A_n^{\pm}(\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} \exp(\pm i\hat{k}\hat{x}) A_n^{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} e_n^m(\mathbf{k}) \exp(\pm i\hat{k}\hat{x}) a_m^{+}(\mathbf{k}),$$

где $a_m^{\pm}(\mathbf{k})$ – операторы рождения и уничтожения четырех сортов фотонов, двух поперечных, “временного” и продольного. Последние являются фиктивными и вводятся, чтобы сохранить четырехмерную структуру вектор-потенциала, и

$$[a_m^-(\mathbf{k}), a_n^+(\mathbf{k}')]_- = -g^{nm}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'), \quad (\mathbf{e}^{\alpha}\cdot\mathbf{e}^{\beta}) = \delta_{\alpha,\beta} \quad (\alpha,\beta = 1,2,3), \quad e_0^{\alpha} = 0, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}.$$

Для дальнейшего удобно перейти к двум поперечным поляризациям фотонов. Оператор вектор-потенциала в такой калибровке приобретает вид

$$\mathbf{A}(\hat{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}} \sum_{\lambda=1,2} \left\{ \mathbf{e}(\mathbf{k},\lambda) a^-(\mathbf{k},\lambda) \exp(-i\hat{k}\hat{x}) + \mathbf{e}(\mathbf{k},\lambda) a^+(\mathbf{k},\lambda) \exp(i\hat{k}\hat{x}) \right\},$$

$$[\mathbf{e}(\mathbf{k},1) \times \mathbf{e}(\mathbf{k})] = -\mathbf{e}(\mathbf{k},2), \quad \mathbf{e}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad [a^-(\mathbf{k},\lambda), a^+(\mathbf{k}',\lambda')]_- = \delta_{\lambda,\lambda'}\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Выполняя интегрирование по k_i^0 в (2), удобно перейти к новым переменным; в этом случае *релятивистским аналогом* EPR*-пары* (1) *является состояние поля вида*

$$\Phi = \int\int \delta(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2})[a^+(\mathbf{k_1},1)a^+(\mathbf{k_2},2) + a^+(\mathbf{k_1},2)a^+(\mathbf{k_2},1)] \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{\sqrt{2k_1^0}\sqrt{2k_2^0}} \Phi_0. \tag{3}$$

Данное состояние поля является запутанным как по импульсам, так и по поляризациям фотонов. Коэффициентную сингулярную функцию $\delta(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2})$ в (3) следует воспринимать как несобственный предел коэффициентных функций из основного пространства ($F(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2}) \to \delta(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2})$). Ниже удобнее работать с нормированными состояниями типа (3), то есть с заменой ($\delta(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \to F(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2})$).

Амплитуда распространения поля при рождении в точках $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ и уничтожении в точках $(\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ удовлетворяет условию причинности, и отлична от нуля для точек, лежащих на световом конусе. Действительно, переходя к операторам в $\hat{x}$-представлении, имеем

$$a^+(\hat{x},\lambda) = \int a^+(\mathbf{k},\lambda)\exp(i\hat{k}\hat{x}) \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k^0}}.$$

Оператор рождения поля в запутанном состоянии может быть представлен в виде

$$\Psi^+(\hat{x}_1,\hat{x}_2) = F(i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}, i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2})\times$$

$$\times \int\int [a^+(\mathbf{k}_1,1)a^+(\mathbf{k}_2,2)+a^+(\mathbf{k}_1,2)a^+(\mathbf{k}_2,1)]\exp[i(\hat{k}_1\hat{x}_1+\hat{k}_2\hat{x}_2)]\frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{\sqrt{2k_1^0}\sqrt{2k_2^0}}.$$

Замена в аргументах F чисел $\mathbf{k}_i$ на оператор производной возможна, если F является достаточно гладкой функцией.

Амплитуда распространения поля дается выражением

$$\Phi_0^*\Psi^-(\hat{y}_1,\hat{y}_2)\Psi^+(\hat{x}_1,\hat{x}_2)\Phi_0 = F^*(i\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1}, i\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_2})F(i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}, i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2})\times$$

$$\times \left\{D_0^+(\hat{x}_1-\hat{y}_1)D_0^+(\hat{x}_2-\hat{y}_2)+D_0^+(\hat{x}_1-\hat{y}_2)D_0^+(\hat{x}_2-\hat{y}_1)\right\}.$$

Амплитуда распространения в случае бозонов представляет собой симметризованную комбинацию положительно-частотных перестановочных функций. Сама амплитуда отлична от нуля и сингулярна на световом конусе. Предел амплитуды при переходе к идеальной EPR-паре ($F \to \delta$) реализуется как несобственный предел. Для любой коэффициентной функции из основного пространства ($F \to \delta$) амплитуда всегда отлична от нуля лишь на световом конусе[1] ($(\hat{x}_i-\hat{y}_j)^2=0$).

Обсудим теперь измерения над EPR-состоянием. Последовательная и завершенная теория измерений в релятивистской квантовой теории поля, в отличие от нерелятивистской квантовой механики, отсутствует.

В нерелятивистской квантовой механике любое измерение над системой описывается отображением выпуклого множества состояний системы, описываемого положительными операторами со следом единица (матрицами плотности), в распределение вероятностей на некотором измеримом множестве результатов. Подобные отображения описываются операторными разложениями единицы на измеримом множестве результатов (см., например, [6]). Если работать с состояниями поля с фиксированным числом частиц (в некотором подпространстве фоковских состояний), то измерение можно построить по аналогии с разложением единицы для нерелятивистского случая. Введем локальные детектирующие операторы

$$M(\hat{x}_1)=\sum_{\lambda=1,2}\left(\int a^+(\mathbf{k},\lambda)\exp(i\hat{k}\hat{x}_1)d\mathbf{k}\right)\left(\int a^-(\mathbf{k}',\lambda)\exp(-i\hat{k}'\hat{x}_1)d\mathbf{k}'\right), \qquad (4)$$

аналогично для второго наблюдателя в точке $\hat{x}_2$. Данное измерение может быть интерпретировано как измерение числа фотонов независимо от поляризации в точках $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$, соответственно. В нерелятивистской квантовой механике данному измерению отвечало бы разложение единицы вида

$$M(d\mathbf{x})=\sum_{s=\uparrow,\downarrow}\left(\int|\mathbf{k},s\rangle\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})d\mathbf{k}\right)\left(\int\langle\mathbf{k}',s|\exp(i-\mathbf{k}'\mathbf{x})d\mathbf{k}'\right)d\mathbf{x}, \quad \int M(d\mathbf{x})=I,$$

где $|\mathbf{k},s\rangle$ – состояние нерелятивистской частицы с импульсом $\mathbf{k}$ и спином s.

Вычисление коммутатора детектирующих операторов показывает, что

$$[M(\hat{x}_1),M(\hat{x}_2)]=$$

[1] Заметим, что для массивных частиц амплитуда распространения поля, из-за экспоненциальных "хвостов" $D^{\pm}$-функций, отлична от нуля вне светового конуса на комптоновской длине, однако это не приводит к нарушению причинности (см. подробности в [4]).

$$= 2(2\pi)^3 i \sum_{\lambda} \left(B^+(\hat{x}_1) B^-(\hat{x}_2) \frac{\partial}{\partial x_2^0} D_0^+(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) - B^+(\hat{x}_2) B^-(\hat{x}_1) \frac{\partial}{\partial x_2^0} D_0^-(\hat{x}_2 - \hat{x}_1) \right),$$

$$B^{\pm}(\hat{x}_i) = \int a^{\pm}(\mathbf{k}, \lambda) \exp(\pm i\hat{k}\hat{x}_i) d\mathbf{k},$$

то есть $[M(\hat{x}_1), M(\hat{x}_2)] \neq 0$ только на световом конусе $(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 = 0$. Поэтому естественно было бы предположить, что результаты измерений операторов $M(\hat{x}_1)$ и $M(\hat{x}_2)$ могут быть коррелированы только в том случае, если $(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 = 0$ (в случае массивных частиц, если $(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 \geq 0$). В действительности, однако, оказывается, что для некоторых состояний поля (в том числе EPR-состояний) корреляция может иметь место и в случае $(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 < 0$.

Из-за сингулярности функций в квантовой теории поля имеет смысл говорить только об относительной вероятности при измерениях. Совместная вероятность детектирования фотонов с поляризацией λ_1 в точке $\hat{x}_1$ и λ_2 в точке $\hat{x}_2$ имеет вид (детектирующие операторы берутся в нормальной форме, когда операторы уничтожения стоят слева от операторов рождения)

$$\Pr(\hat{x}_1, \lambda_1; \hat{x}_2, \lambda_2) = \mathbf{\Phi}^* : M(\hat{x}_1) M(\hat{x}_2) : \mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}_0^* \mathbf{\Psi}^- : M(\hat{x}_1) M(\hat{x}_2) : \mathbf{\Psi}^+ \mathbf{\Phi}_0;$$

здесь

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}^+ \mathbf{\Phi}_0 = \int\int F(\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}) [a^+(\mathbf{k_1}, 1) a^+(\mathbf{k_2}, 2) + a^+(\mathbf{k_1}, 2) a^+(\mathbf{k_1}, 2)] \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{\sqrt{2k_1^0}\sqrt{2k_2^0}} \mathbf{\Phi}_0,$$

находим (опуская несущественные числовые множители)

$$\Pr(\hat{x}_1, \lambda_1; \hat{x}_2, \lambda_2) = (\delta_{\lambda_1,1}\delta_{\lambda_2,2} + \delta_{\lambda_1,2}\delta_{\lambda_2,1}) \left| F(i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}, i\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2}) D_0^+(\hat{x}_1) D_0^-(\hat{x}_2) \right|^2. \qquad (5)$$

Имеется полная корреляция в измерениях поляризации двух наблюдателей, причем вероятность отлична от нуля, как следует из (5), даже если они разделены пространственно-подобным интервалом. В пределе идеальных EPR-корреляций $(F \to \delta)$ выражение для вероятности сводится к следующему (множитель с поляризациями опускаем):

$$\Pr(\hat{x}_1; \hat{x}_2) = -D_0^+(-\hat{\mathcal{X}}) D_0^-(\hat{\mathcal{X}}) = [D_0^-(\hat{\mathcal{X}})]^2, \quad \mathcal{X} = (x_1^0 + x_2^0, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \qquad (6)$$

Вероятность дается произведением двух сингулярных обобщенных функций. Несмотря на то, что каждый из сомножителей сингулярен при $\hat{\mathcal{X}}^2 = 0$, тем не менее это произведение и его преобразование Фурье существуют как обобщенная функция [7]. Это связано с тем, что носитель D^--функции лежит в передней части светового конуса. Отметим, что сингулярность в D^--функциях в (6) лежит на поверхности $\hat{\mathcal{X}}^2 = 0$ (для других запутанных состояний сингулярность может иметь место при другой комбинации аргументов), а не на световом конусе, когда разность $(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 = 0$.

Фурье-преобразование (6) имеет вид

$$\mathcal{F}[D_0^+(-\hat{\mathcal{X}}) D_0^-(\hat{\mathcal{X}})] = \int D_0^+(-\hat{\mathcal{X}}) D_0^-(\hat{\mathcal{X}}) \exp(i\hat{k}\hat{\mathcal{X}}) d\hat{\mathcal{X}} = \frac{1}{8\pi}\theta(k^0)\theta(\hat{k}^2).$$

Поскольку интегрирование проводится лишь по передней части светового конуса, то вероятность (6) определена как обобщенная функция:

$$\Pr(\hat{x}_1;\hat{x}_2) = \frac{1}{8\pi}\int \theta(k^0)\theta(\hat{k}^2)\exp\left(-i\hat{k}\hat{\mathcal{X}}\right)d\hat{k} = -\frac{1}{2r}\varepsilon(\mathcal{X}^0)\frac{\partial}{\partial r}\delta(\hat{\mathcal{X}}^2) + \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\left[\frac{1}{\hat{\mathcal{X}}^2}\right],$$

$$\varepsilon(\mathcal{X}^0)\delta(\hat{\mathcal{X}}^2) = \frac{\delta(\mathcal{X}^0 - r) - \delta(\mathcal{X}^0 + r)}{2r}, \quad r^2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2.$$

Требование микропричинности в квантовой теории поля не приводит к запрету полных корреляций в измерениях двух наблюдателей, разделенных пространственно-подобным интервалом, над запутанным EPR-состоянием поля. Подобная корреляция в результатах измерений не означает наличия причинно-следственной связи, поскольку, несмотря на то, что исход измерения в одной точке предопределяет исход измерения во второй, такие корреляции сами по себе не позволяют передавать информацию между двумя наблюдателями быстрее скорости света. Действительно, передача информации и причинно-следственная связь между двумя точками подразумевает, что первый из наблюдателей *по своей воле* может приготавливать по крайней мере два различных квантовых состояний поля, которые затем достигают второго наблюдателя. Скорость распространения изменения состояния поля ко второму наблюдателю, и это есть следствие требования микропричинности (локальности коммутационных соотношений), не может осуществляться быстрее скорости света.

В случае измерений над двухчастичным EPR-состоянием поля, результат первого наблюдателя для него заранее неизвестен, и это обстоятельство не позволяет ему передавать информацию (реализовать причинно-следственную связь со вторым наблюдателем). Причинно-следственная связь имеет место между *одним* "источником" (причиной) EPR-состоянием поля и *двумя* результатами измерений (следствиями). Амплитуда распространения поля от источника до каждого из наблюдателей осуществляется не быстрее скорости света.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект #99-02-18127).

---

1. A.Einstein, B.Podolsky, and N.Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
2. J.S.Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 1987.
3. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, М.: Наука, 1973.
4. Д.И.Блохинцев, *Пространство и время в микромире*, М.: Наука, 1982.
5. G.Weihs, T.Jennewein, C.Simon et al., Phys. Rev. Lett. **81**, 5039 (1998).
6. А.С.Холево, *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории*, М.: Наука, 1980.
7. Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, И.Т.Тодоров, *Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля*, М.: Наука, 1969.