

САМООРГАНИЗАЦИЯ КРИТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ В ДВУМЕРНОМ МНОГОКОНТАКТНОМ СКВИДА ПРИ ЗАКРЫТЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

С.Л.Гинзбург, Н.Е.Савицкая

Санкт-Петербургский институт ядерной физики РАН
188350 Гатчина, Россия

Поступила в редакцию 16 декабря 1998 г.

Представлена модель закрытой системы с самоорганизацией. Это упрощенная модель многоконтактного СКВИДа, помещенного в переменное магнитное поле. Самоорганизованное критическое состояние в нашей закрытой системе реализуется благодаря тому, что сброс тока, обеспечивающий самоорганизацию в открытых системах, заменяется здесь принципиально иным механизмом – аннигиляцией токов.

PACS: 64.60.Lx, 74.50.+g

Предложенная в 1987 г. [1] и интенсивно развиваемая в настоящее время концепция самоорганизованной критичности (СОК) применяется для описания поведения широкого класса диссипативных динамических систем. В процессе своей эволюции такие системы достигают критического состояния, которое в дальнейшем является самоподдерживающимся и по структуре представляет собой набор метастабильных состояний, переходящих друг в друга посредством "лавины", возникающих в результате локального внешнего возмущения системы. Такое критическое состояние называется самоорганизованным, а критерием существования СОК в системе считается степенное поведение плотности вероятности размеров лавин.

В работе [2] было показано, что интересным физическим примером системы, в которой реализуется СОК, могут служить гранулированные сверхпроводники (ГСП) в случае большой величины основного параметра системы $V \sim j_c a^3 / \Phi_0$ (j_c – критический ток межгранульных контактов, a – размер гранулы, Φ_0 – квант магнитного потока). В [2], используя физические особенности поведения ГСП при $V \gg 1$, ввели упрощенные модели для различных видов ГСП. Оказалось, что упрощенная модель двумерного многоконтактного СКВИДа с инжекцией положительного тока в случайно выбранный контакт при открытых граничных условиях эквивалентна абелевой модели кучи песка (АМКП) – одной из основных математических моделей для изучения СОК [3]. Однако, благодаря своей физической природе, модель многоконтактного СКВИДа обладает рядом новых свойств и дает возможность рассматривать систему в условиях, которые не возникали ранее для АМКП и других систем с СОК.

Так, при изучении критического состояния ГСП на практике, сверхпроводник помещается в переменное магнитное поле и в этом случае естественными являются закрытые граничные условия, при которых ни в одной из ранее известных моделей для изучения СОК самоорганизации не существует. В настоящей работе мы показываем, что в модели многоконтактного СКВИДа, помещенного в переменное магнитное поле, при закрытых граничных условиях СОК реализуется.

Возможность самоорганизации в нашей модели при закрытых граничных условиях обусловлена рядом физических особенностей ГСП, отличающих их от ранее известных систем с СОК.

Во-первых, переменное магнитное поле одновременно возбуждает в ГСП как положительный ток, и отрицательный ток, что приводит к необходимости учитывать второе (отрицательное) пороговое значение для токов в вольт-амперной характеристике контактов, которое было несущественно в условиях работы [2], при инжекции в систему лишь положительного тока. Заметим, что в АМКП имеется только положительный порог, так как все величины по смыслу положительны.

Во-вторых, токи противоположных знаков могут аннигилировать между собой, и процесс аннигиляции заменяет процесс сброса тока за пределы системы, который обеспечивает возможность существования СОК при открытых граничных условиях.

Рассматриваемый нами двумерный многоконтактный СКВИД представляет собой две сверхпроводящие пластины, параллельные друг другу и соединенные джозефсоновскими контактами. Будем считать, что магнитное поле направлено по оси y , $\mathbf{h}_{\text{ex}} = h_{\text{ex}} \mathbf{e}_y$. Контакты размером $l \times l$ расположены в узлах решетки размером $N \times M$ с периодом a , расположенной в плоскости (x, y) . Джозефсоновский ток течет по оси z (рис.1). Пользуясь резистивной моделью джозефсоновского контакта, мы можем записать систему уравнений для калибровочно-инвариантных разностей фаз $\varphi_{n,m}$ в виде [4, 5]:

$$\begin{aligned} V \sin \varphi_{n,m} + \tau \frac{d\varphi_{n,m}}{dt} &= \Delta_{n,m}(\varphi) + 2\pi F_{n,m}, \\ V &= \frac{2\pi j_c}{j_\varphi}, \quad j_\varphi = \frac{\Phi_0}{8\pi l^2 \lambda_L}, \quad F_{n,m} = \frac{j_{1n,m}}{j_\varphi}, \quad \tau = \frac{\Phi_0}{\rho_0 j_\varphi}, \\ \Delta_{n,m}(\varphi) &= \varphi_{n+1,m} + \varphi_{n-1,m} + \varphi_{n,m-1} + \varphi_{n,m+1} - 4\varphi_{n,m}, \end{aligned} \quad (1)$$

где j_c – плотность критического тока, λ_L – лондоновская глубина проникновения, Φ_0 – квант потока, ρ_0 – поверхностное сопротивление контакта, $j_{1n,m}$ – плотность тока инжекции, $\Delta_{n,m}$ – двумерный дискретный лапласиан.

В дальнейшем мы будем считать, что $V \gg 1$. Это условие обеспечивает наличие большого числа метастабильных состояний для каждого из СКВИДов, составляющих нашу систему [4]. В этом случае для исследования критического состояния многоконтактного СКВИДа мы воспользуемся упрощенной моделью ГСП, введенной в [2], которая описывается системой отображений (уравнений с дискретным временем) для безразмерных токов через контакты

$$z_{n,m} = z_c \sin \varphi_{n,m} + \frac{\tau}{2\pi} \frac{\partial \varphi_{n,m}}{\partial t},$$

где $z_c = V/2\pi$:

$$\begin{aligned} z_{n,m}(k+1) - z_{n,m}(k) &= [\theta(z_{n+1,m}(k) - z_c) - \theta(-z_{n+1,m}(k) - z_c)] + \\ &+ [\theta(z_{n-1,m}(k) - z_c) - \theta(-z_{n-1,m}(k) - z_c)] + [\theta(z_{n,m-1}(k) - z_c) - \theta(-z_{n,m-1}(k) - z_c)] + \\ &+ [\theta(z_{n,m+1}(k) - z_c) - \theta(-z_{n,m+1}(k) - z_c)] - 4[\theta(z_{n,m}(k) - z_c) - \theta(-z_{n,m}(k) - z_c)] + \xi_{n,m}(k), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\xi_{n,m}(k) = F_{n,m}(k+1) - F_{n,m}(k),$$

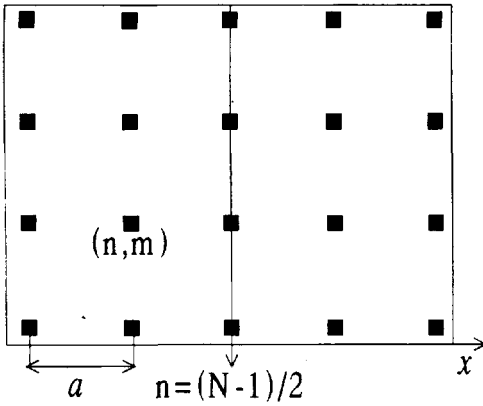


Рис.1. Вид сечения двумерного многоконтактного СКВИДа плоскостью (x, y) †

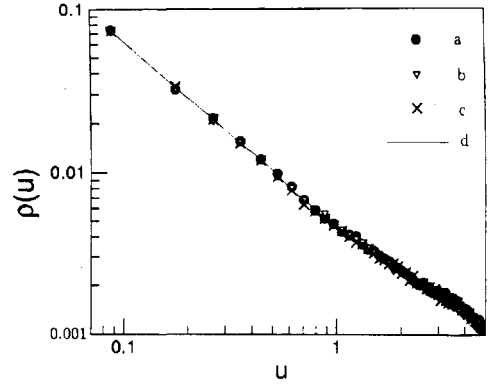


Рис.2. Плотности вероятности напряжений для: а) "положительной" части системы размером 42×21 с аннигиляцией, б) "отрицательной" части системы размером 42×21 с аннигиляцией, в) "положительной" части системы размером 43×21 с аннигиляцией, г) системы с открытой границей размером 21×21

где $\theta[x]$ – тета-функция Хевисайда, k – дискретное время, $F_{n,m}$ – безразмерный ток инжекции, тот же, что и в (1). В рассматриваемом случае прямой инжекции тока в систему не производится, однако можно показать [2], что влияние внешнего магнитного поля h_{ex} эффективно сводится к инжекции положительного тока во все узлы правой границы СКВИДа и точно такого же по величине, но отрицательного тока во все узлы его левой границы. Так что полный ток в системе сохраняется и равен нулю.

Таким образом, для узлов внутри решетки ($1 < n < N, 1 < m < M$), а также на верхней и нижней границах решетки ($m = M, 1 < n < N$ и $m = 1, 1 < n < N$) $\xi_{n,m}(k) = 0$. На левой границе решетки ($1 \leq m \leq M, n = 1$)

$$\xi_{n,m}(k) = \frac{2\lambda_L a}{\Phi_0} (h_{ex}(k) - h_{ex}(k+1)), \quad (3)$$

а на правой границе решетки ($n = N, 1 \leq m \leq M$)

$$\xi_{n,m}(k) = \frac{2\lambda_L a}{\Phi_0} (h_{ex}(k+1) - h_{ex}(k)). \quad (4)$$

Кроме того, как уже неоднократно отмечалось, в системе реализуются закрытые граничные условия (см. подробнее [2]). Таким образом, на границах решетки, например, на левой границе, уравнения (2) приобретают вид

$$\begin{aligned} z_{n,m}(k+1) - z_{n,m}(k) = & [\theta(z_{n+1,m}(k) - z_c) - \theta(-z_{n+1,m}(k) - z_c)] + \\ & + [\theta(z_{n,m-1}(k) - z_c) - \theta(-z_{n,m-1}(k) - z_c)] + [\theta(z_{n,m+1}(k) - z_c) - \theta(-z_{n,m+1}(k) - z_c)] - \\ & - 3[\theta(z_{n,m}(k) - z_c) - \theta(-z_{n,m}(k) - z_c)] + \xi_{n,m}(k). \end{aligned} \quad (5)$$

В угловых контактах решетки, например в (1,1) имеем:

$$z_{n,m}(k+1) - z_{n,m}(k) = [\theta(z_{n,m+1}(k) - z_c) - \theta(-z_{n,m+1}(k) - z_c)] +$$

$$+[\theta(z_{n+1,m}(k) - z_c) - \theta(-z_{n+1,m}(k) - z_c)] - 2[\theta(z_{n,m}(k) - z_c) - \theta(-z_{n,m}(k) - z_c)] + \xi_{n,m}(k), \quad (6)$$

Система отображений (2), (5), (6) с соответствующими $\xi_{n,m}(k)$ может быть записана в виде алгоритмов, которыми принято описывать динамику систем с СОК, в частности АМКП. Аналогом высот в этом случае является значение тока $z_{n,m}$, а основным отличием от АМКП, помимо закрытых граничных условий, является возможность существования в системе отрицательных токов и наличие второго (отрицательного) порога $-z_c$.

Компьютерное моделирование системы, описываемой уравнениями (2), (5), (6), производилось при $z_c = 9.5$ стандартным для систем с СОК образом.

1. Начиная с пустой решетки (все $z_{n,m}(0) = 0$), мы возбуждали ток в системе по правилу

$$\xi_{N,p}(k) = 1, \quad \xi_{1,l}(k) = -1, \quad (7)$$

где p и l – случайны и независимы. Заметим, что правила возбуждения (7) отличаются от ранее описанных и обычно реализуемых в эксперименте (3), (4). Однако они не нарушают основного физического требования о равенстве нулю полного тока, инжектируемого в систему. Мы выбрали способ возмущения (7) потому, что в случае правил (3), (4) система вырождается в набор одномерных полос, а, как известно, в одномерной ситуации СОК не существует [1].

2. После возбуждения тока система релаксирует согласно уравнениям (2), (5), (6). Во время процесса релаксации, вплоть до полной остановки динамики, для всех контактов $\xi_{n,m}(k) = 0$.

3. После остановки динамики, то есть когда все $|z_{n,m}| < z_c$, в системе вновь возбуждается ток, согласно правилам (7), и процесс повторяется, согласно 2 и 3.

После переходного процесса система достигает критического состояния, которое представляет собой набор переходящих друг в друга метастабильных состояний, в каждом из которых значения токов в левой части решетки – отрицательны, а в правой – положительны.

Здесь и далее деление решетки на правую и левую части различно для четного и нечетного N . В случае четного N левая часть решетки – это контакты с $1 \leq n \leq N/2$, а правая – с $N/2 + 1 \leq n \leq N$. Для нечетного N левая часть решетки – это контакты с $1 \leq n \leq (N-1)/2$, а правая – с $(N-1)/2 + 2 \leq n \leq N$. То есть в случае нечетного N правая и левая части решетки разделены столбцом контактов с $n = (N-1)/2 + 1$.

Назовем лавиной процесс возбуждения тока со следующей за ним релаксацией и будем нумеровать лавины индексом i . Для каждой лавины в стационарном критическом состоянии вычислялись следующие величины.

1. Средний по "положительной" подсистеме ток на момент окончания i -ой лавины (аналог массы системы в АМКП [6])

$$z_i^+ = \frac{1}{S} \sum_{m=1}^M \sum_{n=N_1}^N z_{n,m}(k_i), \quad (8)$$

где k_i – момент окончания i -ой лавины, S – размер подсистемы. Для четного N : $N_1 = N/2 + 1$, $S = MN/2$, а для нечетного N : $N_1 = (N-1)/2 + 2$, $S = M(N-1)/2$.

2. Среднее по соответствующей подсистеме напряжение за время i -ой лавины (аналог размера лавины в АМКП [6]). Для "положительной" подсистемы

$$u_i^+ = \frac{1}{S} \sum_{k=k_{i-1}+1}^{ki} \sum_{m=1}^M \sum_{n=N_1}^N [\theta(z_{n,m}(k) - z_c) - \theta(-z_{n,m}(k) - z_c)]. \quad (9)$$

Для "отрицательной" подсистемы

$$u_i^- = \frac{1}{S} \sum_{k=k_{i-1}+1}^{ki} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_2} [-\theta(-z_{n,m}(k) - z_c) + \theta(z_{n,m}(k) - z_c)], \quad (10)$$

где $N_2 = N/2$ - для четного N , $N_2 = (N - 1)/2$ - для нечетного N .

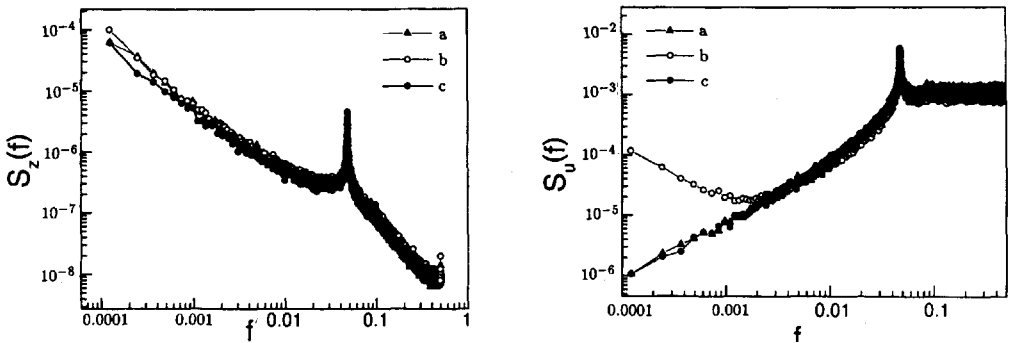


Рис.3. Спектры мощности токов $S_z(f)$ и напряжений $S_u(f)$ для а) "положительной" части системы размером 43×21 с аннигиляцией, б) "положительной" части системы размером 42×21 с аннигиляцией, в) системы с открытой границей размером 21×21

Будем характеризовать возникшее критическое состояние с помощью плотностей вероятности напряжений $\rho(u_i^+)$ и $\rho(|u_i^-|)$. Они представлены на рис.2. Эти величины демонстрируют степенную зависимость $\rho(u) \sim u^{-\alpha}$, $\alpha \approx 1$. Таким образом, в "положительной" и "отрицательной" частях нашей закрытой системы существует самоорганизованное критическое состояние.

Существование СОК в закрытой системе становится возможным благодаря наличию токов противоположных знаков, которые могут аннигилировать между собой. При $z_c = 9.5$ и описанной геометрии системы процесс аннигиляции происходит на контактах, находящихся на границе "положительной" и "отрицательной" подсистем. В случае нечетного N это центральный столбец контактов с $n = (N - 1)/2 + 1$, а в случае четного N - столбцы контактов с $n = N/2$ и $n = N/2 + 1$.

Контакты, на которых происходит аннигиляция, эффективно играют роль резервуара для тока, сбрасываемого с "положительной" и "отрицательной" подсистем. По определению правой и левой частей решетки и согласно уравнениям (8) - (10) эти контакты учитываются при расчетах только для четного N . Поэтому можно предположить, что при нечетном N свойства "положительной" подсистемы полностью эквивалентны свойствам системы соответствующего размера с одной открытой границей.

Чтобы проверить это, мы сравнили "положительную" подсистему с многоконтактным СКВИДом размером $N_2 \times M$, $N_2 = N/2$ в случае четного N и $N_2 =$

$= (N - 1)/2 \times M$ в случае нечетного N . Правая, верхняя и нижняя границы этого СКВИДа – закрыты, левая – открыта.

Мы изучали систему с одной открытой границей в том же режиме, что и ранее систему с аннигиляцией. Положительный ток инжектировался в случайно выбранный узел правой границы, что вызывало лавину. Следующая инжекция тока производилась после того, как система достигала очередного метастабильного состояния. В этом случае в уравнениях, описывающих динамику токов, достаточно учитывать только положительный порог. Тогда, как было показано в [2], эти уравнения полностью совпадают с правилами добавления и осыпания в АМКП с соответствующими граничными условиями и добавлением песчинок на правую границу.

Как и для "положительной" подсистемы, определим для системы с открытой границей для каждой лавины в стационарном критическом состоянии средний по системе ток на момент окончания i -ой лавины (формула (8) с n , меняющимся от 1 до N_2) и среднее по системе напряжение за время i -ой лавины (формула (9) с n , меняющимся от 1 до N_2 и при отсутствии второго слагаемого, возникающего в результате учета второго порога).

Мы сравнивали "положительную" подсистему и систему с открытой границей не только по плотности вероятности напряжения, но и по спектрам мощности токов $S_z(f)$ и напряжений $S_u(f)$, которые, как было показано в [6], являются более чувствительными к особенностям системы характеристиками:

$$S_z(f) = 2 \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} [\langle z_{j_0} z_{j_0+j} \rangle - \langle z \rangle^2] e^{-i2\pi f j}, \quad (11)$$

где $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по номеру лавины. Для $S_u(f)$ формула аналогична.

Из приведенных на рис.2, 3 данных видно, что в случае нечетного N свойства критического состояния системы с аннигиляцией и открытой границей полностью эквивалентны, их плотности вероятности напряжений совпадают в широком интервале, а спектры мощности токов и напряжений ведут себя одинаково. В случае же четного N в спектрах мощности напряжений для исследуемых систем наблюдается различие на низких частотах. При помощи расчетов для систем различных размеров было установлено, что расхождение в поведении спектров для четного и нечетного N наблюдается, начиная с частоты $f_p \sim 1/M^2$.

В заключение заметим, что, как в случае системы с аннигиляцией, так и для системы с открытой границей, в спектрах имеется пик, который говорит о наличии в системе квазипериодического процесса. Были проведены также расчеты для систем различных размеров и было установлено, что частота этого пика $f_0 \sim 1/M$.

Таким образом, основные результаты настоящей работы можно сформулировать следующим образом. В работе представлена модель закрытой системы, в которой реализуется СОК – это упрощенная модель многоконтактного СКВИДа, помещенного в переменное магнитное поле. Магнитное поле индуцирует в системе как положительный так и отрицательный токи. Сброс тока, обеспечивающий существование СОК в открытых системах, заменяется принципиально иным механизмом – процессом аннигиляции токов противоположных знаков. В работе также показано, что если не учитывать в расчетах контакты, на которых происходит аннигиляция, то свойства критического состояния для системы с аннигиляцией и системы соответствующего размера с одной открытой границей полностью эквивалентны. В случае же учета

влияния процесса аннигиляции различие между двумя системами наблюдается лишь в спектрах мощности напряжений на низких частотах.

Авторы выражают благодарность М.А.Пустовойту и О.В.Герашенко за заинтересованное обсуждение проблемы и ценные замечания.

Работа поддержана Научным советом направления "Сверхпроводимость" программы "Актуальные направления физики конденсированных сред" и выполнена в рамках проекта 96021 "Профиль". Работа также поддержана подпрограммой "Статистическая физика" Государственной научно-технической программы "Физика квантовых и волновых процессов" по проекту VIII-3 и Государственной программой "Нейтронные исследования вещества".

-
1. P.Bak, C.Tang, and K.Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381(1987).
 2. С.Л.Гинзбург, ЖЭТФ **106**, 607 (1994).
 3. D.Dhar, Phys. Rev. Lett. **64**, 1613 (1990).
 4. К.К.Лихарев, *Введение в динамику джозефсоновских переходов*, М.: Наука, 1985.
 5. А.Бароне, Дж.Патерно, *Эффект Джозефсона*, М.: Мир, 1984.
 6. S.L.Ginzburg, M.A.Pustovoit, and N.E.Savitskaya, Phys. Rev. **E57**, 1319 (1998).