Письма в ЖЭТФ, том 69, вып.2, стр.126 - 131 © 1999г. 25 января

ФУНКЦИЯ ГРИНА 2D ФЕРМИ-СИСТЕМЫ, ИСПЫТЫВАЮЩЕЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД

В.П.Гусынин[+], *В.М.Локтев*[+1)], *С.Г.Шарапов*[+*]

[+]*Институт теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова НАН Украины 252143 Киев, Украина*

[*]*Departament of Physics, University of Pretoria 0002 Pretoria, South Africa*

Поступила в редакцию 16 декабря 1998 г.

Получено явное выражение для одночастичной функции Грина 2D металлической системы с притяжением между носителями. Показано, что учет поперечных фазовых флуктуаций приводит к неполюсному характеру этой функции во всей области конечных температур (как выше, так и ниже точки топологического фазового перехода), где отличен от нуля модуль комплексного поля порядка, описывающего переход из несверхпроводящего (в том числе нормального) состояния в сверхпроводящее, появление которого в 2D случае не сопровождается спонтанным нарушением зарядовой симметрии.

PACS: 74.25.-q, 74.40.+k, 74.72.-h

1. И без того немалое внимание к изучению низкоразмерных систем возросло еще больше после открытия высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП). Многие их свойства, в первую очередь электронные, оказались (см., например, обзор [1]) столь анизотропными, что допускают описание на основе 2D моделей. Особенно нетривиальным это представлятся в отношении критической температуры T_c, поскольку ее высокие, до $\sim 10^2$ К, значения, сохраняясь практически (если иметь в виду количество купратных плоскостей) в монослоях [2], есть, по-видимому, прерогатива двумерная, а не следствие каких-либо трехмеризующих взаимодействий. Более того, эксперимент свидетельствует о, как правило, исключительной плавности (особенно в слабо допированных образцах) перехода между нормальным и сверхпроводящим (СП) состояниями ВТСП[2)], что позволяет относить последний к кроссоверному, нежели обычному фазовому превращению II-рода. Сказанное, возможно, в какой-то мере объясняет, почему изучение низкоразмерных электронных жидкостей стало одной из важных задач физики конденсированного состояния (см. обзор Вигмана [6]).

Один из способов их описания был предложен в работах [7–9], где рассматривались простые модели 2D металла с произвольной плотностью носителей n_f, или, что то же самое, произвольным значением энергии Ферми ϵ_F невзаимодействующих фермионов, поскольку для них $\epsilon_F = \pi n_f/m$ (m – эффективная масса носителя). Было показано, что в этом случае роль критической играет температура T_{BKT} топологического перехода Березинского – Костерлица – Таулесса. Параметр порядка в своем обычном смысле здесь, как известно, отсутствует, тем не менее температура превращения нормального состояния в сверхпроводящее может быть рассчитана путем

---

1) e-mail: vloktev@bitp.kiev.ua

2) К примеру, однородная магнитная восприимчивость [3], теплоемкость [4], скорость ЯМР релаксации [5] зачастую вообще не реагируют на T_c. При этом изменение сопротивления остается достаточно резким, а переход – соответственно узким.

введения комплексного поля порядка $\Phi(x)$, для которого $<\Phi(x)>=0$. Будучи из того же класса универсальности, что и 2D XY-модель [10,11], СП модель не тождественна ей. Специфика последней состоит в том, что во-первых, "двухкомпонентный вектор" $\Phi(x)$ не является единичным – его модуль не сохраняется при увличении выше $T_{\text{ВКТ}}$, резко уменьшаясь в окрестности и выше среднеполевой температуры T_c^{MF}, которая всегда выше $T_{\text{ВКТ}}$, и, во-вторых, обе эти температуры суть функции n_f.

Однако не меньший интерес представляют спектральные характеристики СП как выше, так и ниже T_c ($T_{\text{ВКТ}}$). К тому же фотоэмиссионные либо туннельные эксперименты допускают прямое определение спектральной функции СП $A(\omega, \mathbf{k})$, непосредственно связанной соотношением $A(\omega, \mathbf{k}) = \pi^{-1}\mathrm{Im}G(\omega + i0, \mathbf{k})$ с одночастичной функцией Грина (ФГ), запись которой для ВТСП обычно основывается на феноменологических или в той или иной степени качественных соображениях [12–14]. По-существу, имеется лишь работа [5], где предпринималась попытка аналитического расчета ФГ 2D модели Хаббарда с притяжением, но и в ней из-за использования T-матричного подхода вопрос о поведении спектра в окрестности фазового перехода фактически не затрагивался. В связи с этим имеется потребность в расчете ФГ на основе пусть простой, но нетривиальной модели, содержащей топологический переход. Насколько известно, подобное вычисление пока не проводилось.

2. Как и в [7,8], используем простейший гамильтониан 2D фермионов с притяжением ($\hbar = k_B = 1$)

$$\mathcal{H} = \psi_\sigma^\dagger(x)(-\nabla^2/2m - \mu)\psi_\sigma(x) - V\psi_\uparrow^\dagger(x)\psi_\downarrow^\dagger(x)\psi_\downarrow(x), \tag{1}$$

где $x = \mathbf{r}, \tau$ – пространственная и мнимая временная переменные; $\psi_\sigma(x)$ – ферми-поле со спином $\sigma = \uparrow, \downarrow$; μ – химический потенциал, фиксирующий n_f; V – эффективное притяжение. Дальнейший расчет связан с введением спиноров Намбу и рассмотрением фермионов как составных, из спиновой и зарядовой частей, объектов:

$$\Psi^\dagger(x) = (\psi_\uparrow^\dagger(x), \quad \psi_\downarrow(x)) = \Upsilon^\dagger(x)\exp[-i\tau_3\theta(x)/2], \tag{2}$$

где $\Upsilon^\dagger(x)$ отвечает спинору Намбу нейтральных фермионов. Учитывая, что согласно стандартному определению ФГ

$$G(x) =<\Psi(x)\Psi^\dagger(0)>, \tag{3}$$

и подставляя (2) в (3), приходим к выражению

$$G_{\alpha\beta}(x) = \sum_{\alpha_1\beta_1} \mathcal{G}_{\alpha_1\beta_1}(x) < [\exp(i\tau_3\theta(x)/2)]_{\alpha\alpha_1}[\exp(-i\tau_3\theta(0)/2)]_{\beta_1\beta} >, \tag{4}$$

из которого видно, что ФГ заряженных (наблюдаемых) ферми-частиц представляет собой произведение ФГ

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x) =<\Upsilon(x)_\alpha\Upsilon^\dagger(0)_\beta> \tag{5}$$

нейтральных фермионов и коррелятора фаз $<\exp(i\tau_3\theta(x)/2)\exp(-i\tau_3\theta(0)/2)>$, отвечающего зарядовым степеням свободы. Фурье-преобразование позволяет привести выражение (4) к виду

$$G(i\omega_n, \mathbf{k}) = T\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\sum_{\alpha,\beta=\pm} P_\alpha\mathcal{G}(i\omega_m, \mathbf{p})P_\beta D_{\alpha\beta}(i\omega_n - i\omega_m, \mathbf{k}-\mathbf{p}), \tag{6}$$

в котором проекционные операторы $P_{\pm} \equiv (1/2)(I + \tau_3)$, I и τ_i – единичная и паулиевские матрицы, $\omega_n = (2n+1)\pi T$ – мацубаровские ферми-частоты; при этом $D_{\alpha\beta}(i\Omega_n, \mathbf{q})$, которое есть фурье-преобразование $D_{\alpha\beta}(x) = =< \exp(i\alpha\theta(x)/2)\exp(-i\beta\theta(0)/2) >$, содержит, как видно, лишь четные (бозонные) частоты.

ФГ (5) нейтральных частиц была вычислена в [7,8], где показано, что в 2D металле ее вид соответствует получаемому на основе теории БКШ Боголюбова

$$\mathcal{G}(i\omega_n \mathbf{k}) = -\frac{i\omega_n \hat{I} + \tau_3\xi(\mathbf{k}) - \tau_1\rho}{\omega_n^2 + \xi^2(\mathbf{k}) + \rho^2}, \quad \xi(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{l}^2}{2m} - \mu, \tag{7}$$

где вместо $| < \Phi(x) > |$ стоит $< |\Phi(x)| > \equiv \rho$, причем использовано приближение $\Phi(x) = \rho\exp(i\theta(x))$, обеспечивающее $< \Phi(x) > = 0$ в двумерии, благодаря случайным поперечным (исходя из принципа сохранения модуля [10]) флуктуациям фазы поля $\Phi(x)$. Следует обратить внимание, на то, что щель в спектре нейтральных частиц и, соответственно, существование нейтрального конденсата не связаны с так называемыми некогерентными предвестниками (precursor pairs), возникающими в приближении сильной связи выше T_c независимо от размерности пространства [12,13]. В предложенном подходе возникновение нейтрального параметра порядка ρ, генерирующего щель в нормальной фазе 2D металла, есть не что иное, как проявление коллективного поведения системы в целом, изменяющего его спектр и свойства.

3. Представление (6) при известной ФГ (7) показывает, что результирующее выражение для ФГ заряженных частиц целиком определяется коррелятором $D(x) \equiv \equiv D_{\pm\pm}(x)$. Его достаточно общая форма может быть представлена выражением

$$D(t, \mathbf{r}) = \exp(-\gamma t)(r/r_0)^{-T/8\pi J}\exp(-r/\xi_+(T)), \tag{8}$$

следующим из теории БКТ перехода с учетом динамики вихревых возбуждений [10,11,16,17]. В (8) γ – константа временного затухания фазовых корреляций, которое вводится феноменологически; $r_0 \equiv (2/T)(J/K)^{1/2}$ – масштаб алгебраического спадания корреляций в БКТ фазе ($T < T_{\text{БКТ}}$); $\xi_+(T)$ – корреляционная длина в области $T > T_{\text{БКТ}}$, причем $\xi_+(T \to T_{\text{БКТ}}) \to \infty$. Константы J и K соответствуют "поперечной" жесткости и сжимаемости нейтрального конденсата, выражения для которых приведены в [7,8]. Ниже мы рассмотрим лишь статический ($\gamma = 0$) случай, оставляя динамический для отдельного изложения.

Тогда можно показать, что фурье-образ статического коррелятора $D(x)$ имеет вид

$$D(i\Omega_n, \mathbf{q}) = \int_0^{1/T} d\tau \int d\mathbf{r}\exp(i\Omega_n\tau - i\mathbf{q}\mathbf{r})(r/r_0)^{-T/8\pi J}\exp(-r/\xi_+(T)) =$$

$$= 2\pi\delta_{n0}\frac{r_0^{2(1-\alpha)}\Gamma(2\alpha)}{(q^2 + 1/\xi_+^2)^\alpha}\ {}_2F_1\left(\alpha, -\alpha + \frac{1}{2}; 1; \frac{(q\xi_+)^2}{(q\xi_+)^2 + 1}\right), \tag{9}$$

где ${}_2F_1(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция, в которой

$$\alpha = 1 - \frac{T}{8\pi J}. \tag{10}$$

Поскольку она есть слабо меняющаяся функция $\mathbf{q}$, ее хорошим приближением служит асимптотика при $q \to \infty$, так что в итоге для (9) имеем

$$D(i\Omega_n, \mathbf{q}) = C\delta_{n0}\frac{\xi_+^{2\alpha}}{[(q\xi_+)^2+1]^\alpha}, \quad C = 2\pi\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{2}{r_0}\right)^{2\alpha-2}, \tag{11}$$

откуда (см. 6))

$$G(i\omega_n, \mathbf{k}) = -C\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\frac{i\omega_n+\tau_3\xi(\mathbf{q})}{\omega_n^2+\xi^2(\mathbf{q})+\rho^2}\frac{\xi_+^{2\alpha}}{[(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2\xi_+^2+1]^\alpha}. \tag{12}$$

Важно подчеркнуть, что даже для $T < T_{\text{ВКТ}}$ пропагатор (11) фазовых корреляций не имеет канонического поведения $\sim 1/q^2$, характерного, например, для боголюбовской моды в размерностях больше двух. В 2D системах наличие мод с пропагатором $\sim 1/q^2$ приводило бы к сильным инфракрасным сингулярностям; во избежание этого моды "автоматически" смягчаются ($\sim 1/q^{2\alpha}$, поскольку параметр $\alpha < 1$). Заметим также, что пропагатор (12) заряженных фермионов в отличие от пропагатора (7) нейтральных фермионов не содержит слагаемых, пропорциональных матрице τ_1, присутствие которых приводило бы к спонтанному нарушению зарядовой симметрии в противоречии с общей теоремой о невозможности такого нарушения в двумерии [18].

Интеграл в (12) точно вычисляется, приводя к

$$G(i\omega_n, \mathbf{k}) = -\frac{Cm\xi_+^{2\alpha}}{2\pi\alpha}\left[\frac{A}{(u_1u_2)^\alpha}F_1\left(\alpha,\alpha,\alpha;\alpha+1;\frac{u_1-1}{u_1},\frac{u_2-1}{u_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\sqrt{\omega_n^2+\rho^2}\to-\sqrt{\omega_n^2+\rho^2}\right)\right], \tag{13}$$

где F_1 – функция Аппеля двух переменных [19],

$$A = \frac{1}{2}\left(\tau_3 - \frac{\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2+\rho^2}}\right), \quad u_{1,2} = m\xi_+^2(u_0 \pm \sqrt{D}),$$

$$D = u_0^2 + \frac{2}{m\xi_+^2}(\mu - i\sqrt{\omega_n^2+\rho^2}), \quad u_0 \equiv \frac{k^2\xi_+^2+1}{2m\xi_+^2} - \mu + i\sqrt{\omega_n^2+\rho^2}. \tag{14}$$

Выражение (13), в известной мере, завершает аналитическое вычисление искомой ФГ 2D металла во всей актуальной области температур.

4. Для нахождения спектральной плотности необходимо, однако, знать запаздывающую ФГ, которая получается из мацубаровской заменой $i\omega_n \to \omega + i0$, так что $\sqrt{\omega_n^2+\rho^2} \to i\sqrt{\omega^2-\rho^2}$. В итоге из (13) получаем

$$G(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{Cm\xi_+^{2\alpha}}{2\pi\alpha}\left[\frac{\mathcal{A}}{(v_1v_2)^\alpha}F_1\left(\alpha,\alpha,\alpha;\alpha+1;\frac{v_1-1}{v_1},\frac{v_2-1}{v_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\sqrt{\omega^2-\rho^2}\to-\sqrt{\omega^2-\rho^2}\right)\right], \tag{15}$$

где теперь

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(\tau_3 + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\rho^2}}\right), \quad v_{1,2} = m\xi_+^2(v_0 \pm \sqrt{D}),$$

$$D = v_0^2 + \frac{2}{m\xi_+^2}(\mu + \sqrt{\omega^2 - \rho^2}), \quad v_0 = \frac{k^2\xi_+^2 + 1}{2m\xi_+^2} - \mu - \sqrt{\omega^2 - \rho^2}, \tag{16}$$

Рассмотрим сначала область $T < T_{\text{БКТ}}$, когда $\xi_+ = \infty$. В этом случае один из аргументов функции Аппеля становится равным единице и ФГ выражается через гипергеометрическую функцию ${}_2F_1$:

$$G(\omega, \mathbf{k}) = -\Gamma^2(\alpha)\left(\frac{2}{mr_0^2}\right)^{\alpha-1}\left[\frac{\mathcal{A}}{(-z)^\alpha}\,{}_2F_1\left(\alpha, \alpha; 1; \frac{k^2}{2mz}\right) + \left(\sqrt{\omega^2 - \rho^2} \to -\sqrt{\omega^2 - \rho^2}\right)\right], \tag{17}$$

где $z = \mu + \sqrt{\omega^2 - \rho^2}$. Легко проверить предел $T = 0$; при этом $D(\mathbf{r}) \to 1$ (то есть в системе устанавливается дальний порядок), $\alpha = 1$ и, таким образом,

$$G_{11}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega + \xi(\mathbf{k})}{\omega^2 - \xi^2(\mathbf{k}) - \rho^2}, \tag{18}$$

а спектральная функция выражается через обычную сумму двух δ-пиков, соответствующих квазичастичным энергиям[3] $E(\mathbf{k}) = \pm\sqrt{\xi^2(\mathbf{k}) + \rho_0^2}$ ($\rho_0 = \rho(T = 0)$).

Формула (15) позволяет убедиться, что для области $|\omega| < \rho$ ФГ оказывается действительной; другими словами, в этой области частот спектральный вес отсутствует или спектр сохраняет щель во всем диапазоне T, включая несверхпроводящую область, где $\rho \neq 0$.

Однако более интересным представляется то, что ФГ (15) имеет неполюсную структуру. Действительно, ограничиваясь областью $T < T_{\text{БКТ}}$, где она имеет вид (17), нетрудно видеть, что вблизи квазичастичного состояния, когда $\omega \approx \pm E(\mathbf{k})$, аргумент гипергеометрической функции близок к единице. Используя это, а также соотношения между гипергеометрическими функциями [19], находим

$$G(\omega, \mathbf{k}) \sim$$

$$\sim -\Gamma^2(\alpha)\left(\frac{2}{mr_0^2}\right)^{\alpha-1}\frac{\mathcal{A}}{[-(\mu + \sqrt{\omega^2 - \rho^2})]^\alpha}\left\{\frac{\Gamma(1-2\alpha)}{\Gamma^2(1-\alpha)} + \frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma^2(\alpha)}\frac{1}{(1-z_1)^{2\alpha-1}}\right\}, \tag{19}$$

где $z_1 \equiv k^2/2mz = (k^2/2m)/(\mu + \sqrt{\omega^2 - \rho^2}) \simeq 1$.

Найденное разложение имеет необычный вид, ибо содержит разрез, а не полюс. Очевидно, что отличие полученной ФГ (19) от стандартной целиком обусловлено фазовыми флуктуациями, которые приводят к не равному единице значению параметра α (10). И хотя в области $T \leq T_{\text{БКТ}}$ он мал, неполюсное (или, что то же самое, неферми-жидкостное) поведение ФГ важно в принципиальном отношении. Кроме того, этот параметр возрастает либо с ростом T, либо, поскольку $J \sim n_f$ [7,8], с уменьшением плотности носителей, а следовательно, появление наибольших качественных особенностей в свойствах сверхпроводящих 2D металлов следует ожидать по мере уменьшения допирования, что фактически и наблюдается в ВТСП.

Размеры кратного сообщения не позволяют привести подробный анализ полученных формул для ФГ. Но и из приведенных результатов видно, что и спектральная функция, и соответствующая ей плотность одночастичных состояний, к которым приводят ФГ, выписанные выше в статическом приближении, будут содержать щель,

[3] Чтобы получить недиагональные компоненты G_{12}, G_{21}, необходимо восстановить корреляторы $D_{-+}(\mathbf{r})$, $D_{+-}(\mathbf{r})$, которые при $T = 0$ отличны от нуля.

покуда ρ имеет конечное значение. Ее заполнение и превращение в псевдощель требуют, по меньшей мере, учета временно́го затухания γ-корреляций в (8), которое, в свою очередь, приводит к затуханию уже заряженных фермионов. Как правило, последнее вводится в их ФГ искусственно (см., например, [12, 14]), чтобы получить и тем самым описать псевдощелевое поведение нормального состояния ВТСП. Что же касается нефермиевского характера ФГ, то он, как показано выше, с временным затуханием прямо не связан и оказывается присущим 2D металлическим системам уже в статическом приближении для коррелятора фазовых флуктуаций. И несмотря на то, что выше рассмотрена 2D СП система, полученное неполюсное поведение ФГ носит достаточно общий характер и может быть обобщено на случаи других физических ситуаций, где имеется возможность для существования длинноволновых возбуждений составного типа.

Можно, наконец, также ожидать, что имеется область параметров (плотность фермионов, вероятность их межплоскостного туннелирования и т.д.), для которых найденные особенности сохранятся и для ФГ квази-2D систем, к которым только и относятся реальные слоистые, в том числе ВТСП, соединения.

---

1. В.М.Локтев, ФНТ **22**, 3 (1996).
2. K.Saito and M.Kaise, Phys. Rev. **B57**, 11786 (1998).
3. Y.Itoh et al., Phys. Soc. Jpn. **65**, 3751 (1996).
4. J.W.Loram et al., Physica **C235-240**, 134 (1994).
5. А.В.Бондарь и др., в сб. *Физические проблемы ВТСП*, под ред. В.М.Локтева, Киев: Наукова Думка, 1990, с.5.
6. P.B.Wiegmann, cond-mat/9808004.
7. В.П.Гусынин, В.М.Локтев, С.Г.Шарапов, Письма в ЖЭТФ **65**, 170 (1997); ЖЭТФ (в печати).
8. В.П.Гусынин, В.М.Локтев, С.Г.Шарапов, ФНТ **23**, 816 (1997); ФНТ **23**, 1247 (1997).
9. В.М.Локтев, В.М.Турковский, ЖЭТФ **114**, 605 (1998).
10. А.З.Паташинский, В.Л.Покровский, *Флюктуационная теория фазовых переходов*, М.: Наука, 1982.
11. Ю.А.Изюмов, Ю.Н.Скрябин, *Статистическая механика магнитноупорядоченых систем*, М.: Наука, 1987, гл.15.
12. O.Tchernyshyov, Phys. Rev. **B56**, 3372 (1997).
13. B.Janko, J.Mali, and K.Levin, cond-mat/9805018; I.Kostin et al., Phys. Rev. **B58**, R5936 (1998).
14. M.Franz and A.J.Millis, Preprint cond-mat/9705401, to appear in Phys. Rev. **B**.
15. M.Yu.Kagan et al., Phys. Rev. **B57**, 5995 (1998).
16. M.Plischke and B.Bergersen, *Equilibrium Statistical Physics*, Prentice-Hall, New Jersey, 1989, p.167.
17. P.Minnhagen, Rev. Mod. Phys. **59**, 1001 (1987).
18. N.D.Mermin and H.Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1113 (1966); P.C.Hohenberg, Phys. Rev. **158**, 383 (1967); S.Coleman, Comm. Math. Phys. **31**, 259 (1973).
19. Г.Бейтман, А.Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, М.: Наука, 1973.