Письма в ЖЭТФ, том 69, вып.5, стр.387 - 390

СЛАБЫЙ КОЛЛАПС В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

Ю.Н.Овчинников

Институт теоретической физики им.Л.Д. Ландау РАН

117940 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 января 1999 г.

Показано, что существует трехпараметрическое семейство точных решений нелинейного уравнения Шредингера, приводящих к слабому коллапсу.

PACS: 03.65.Ge

Нелинейное уравнение Шредингера

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0, \tag{1}$$

где ψ – скалярная функция в d-мерном пространстве, Δ – оператор Лапласа, возникает в ряде физических задач. Такое уравнение было получено в физике плазмы и нелинейной оптике [1–3]. Нелинейный член в уравнении (1) соответствует притяжению. В результате при всяком значении $\sigma > 0$ однородное состояние $\psi = a\,\exp(ia^{2\sigma}t)$ неустойчиво относительно бесконечно малых возмущений. Закон дисперсии $\omega^2 = K^2(K^2 - 2\sigma a^{2\sigma})$, $\quad\psi = (a+\delta\psi)\exp(ia^2t)$. В области значений $\sigma d > 2$ существуют решения уравнения (1), имеющие особую точку при конечном времени t_0.

Уравнение (1) сохраняет полное число частиц и полную энергию. Энергия E_V и число частиц N_V в объеме V даются выражениями

$$E_V = \frac{1}{2}\int\limits_V d^dr\Big\{|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{1+\sigma}|\psi|^{2(1+\sigma)}\Big\}, \qquad N_V = \int\limits_V d^d\mathbf{r}|\psi|^2, \qquad \nabla \equiv \mathrm{grad}. \tag{2}$$

Уравнения (1), (2) определяют следующее выражение для плотности потока частиц j_n и плотности потока энергии j_E:

$$j_n = i(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi), \qquad j_E = -\frac{1}{2}(\nabla\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\nabla\psi). \tag{3}$$

Коллапсирующие решения уравнения (1) мы будем искать в сферически симметричном виде

$$\psi(\mathbf{r},t) = \lambda^\nu\varphi(\rho\lambda)\exp\big(i\chi(\rho,t)\big), \tag{4}$$

где $\lambda \equiv \lambda(t)$, φ – вещественная функция, ν - численный параметр.

Условие равенства полного потока частиц через сферическую поверхность радиуса ρ, изменению числа частиц N_V внутри сферы дает уравнение на фазу χ:

$$-2\frac{\partial\chi(\rho,t)}{\partial\rho} = \frac{\rho}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{2\nu-d}{\varphi^2(y)}\frac{1}{y^{d-1}}\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\lambda}{\partial t}\int\limits_0^y dy\; y^{d-1}\varphi^2(y), \tag{5}$$

где $y = \rho\lambda$. Из формул (2), (3), (4) находим

$$E_V = \frac{\alpha}{2}\int\limits_0^{\rho} d\rho\, \rho^{d-1}\left\{\varphi^2\lambda^{2\nu}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\rho}\right)^2 + \lambda^{2\nu+2}(\varphi')^2 - \frac{\lambda^{2\nu(1+\sigma)}}{1+\sigma}\varphi^{2(1+\sigma)}\right\},$$

$$\frac{\partial E_V}{\partial t} = \alpha\lambda^{2\nu}\rho^{d-1}\left\{(\nu\varphi + y\varphi')\varphi'\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial\chi}{\partial\rho}\varphi^2\right\}. \tag{6}$$

В уравнениях (6) штрих означает производную $\partial/\partial y$, $\alpha = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ – коэффициент в выражении для "площади" сферической поверхности $S(\rho) = \alpha\rho^{d-1}$, $\Gamma(x)$ – гамма функция Эйлера. Для того чтобы все члены в уравнениях (5), (6) имели одинаковую зависимость от времени при $\nu \neq d/2$, необходимо выполнение следующих условий:

$$\nu\sigma = 1, \qquad \chi(\rho,t) = \chi_0(t) + \tilde\chi(\rho\lambda),$$
$$\frac{1}{\lambda^3}\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \text{const}; \qquad \frac{\partial\chi_0}{\partial t} \sim \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial t}. \tag{7}$$

Из уравнений (7) находим

$$\lambda = \frac{C}{\sqrt{t_0 - t}}, \quad \chi_0(t) = -\frac{C_1}{2}\ln(t_0 - t), \quad \frac{1}{\lambda^3}\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \frac{1}{2C^2}, \quad \frac{\partial\chi_0}{\partial t} = \frac{C_1\lambda^2}{2C^2}, \tag{8}$$

где C, C_1, t_0 – некоторые константы.

Рассмотрим теперь физически наиболее интересный случай $d = 3$, $\sigma = 1$. Общий случай произвольных значений величин $\{d,\sigma\}$ будет рассмотрен отдельно. С учетом формул (8) уравнение (5) на фазу $\tilde\chi$ принимает вид

$$\tilde\chi' + \frac{1}{4C^2}\left(y - \frac{1}{y^2\varphi^2}\int\limits_0^y dy\, y^2\varphi^2\right) = 0. \tag{9}$$

Модуль φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \varphi^3 - \frac{\varphi}{2C^2}(C_1 + y\tilde\chi') - \varphi(\tilde\chi')^2 = 0. \tag{10}$$

Отметим, что всякое решение системы уравнений (9), (10) есть точное решение нелинейного уравнения (1). Положим

$$Z = \int\limits_0^y dy\, y^2\varphi^2. \tag{11}$$

Из уравнений (9), (11) следует простая связь функций $\varphi, \tilde\chi$ с функцией Z:

$$\varphi = \frac{\sqrt{Z'}}{y}, \quad \tilde\chi' = -\frac{yZ' - Z}{4C^2 Z'}, \quad \tilde\chi(y) = \text{const} - \frac{1}{4C^2}\int\limits_0^y dy\frac{yZ' - Z}{Z'}. \tag{12}$$

Подставляя выражение для $\varphi, \tilde\chi$ из (12) в формулу (10), получаем одно обыкновенное дифференциальное уравнение на функцию Z:

$$Z''' - \frac{(Z'')^2}{2Z'} + \frac{2(Z')^2}{y^2} - \frac{1}{C^2}\left(C_1 Z' - \frac{y}{4C^2}(yZ' - Z)\right) - \frac{(yZ' - Z)^2}{8C^4 Z'} = 0. \tag{13}$$

В области $y \ll 1$ из уравнения (13) получаем

$$Z(y) = Ay^3 + \frac{y^5}{15}\left(\frac{3AC_1}{2C^2} - 9A^2\right) + \dots, \tag{14}$$

где $A > 0$ – произвольная константа. В области $y \gg 1$ асимптотическое решение уравнения (13) есть

$$Z = By - \frac{2BC^2C_1}{y} + \frac{2BC^4}{y^3}(B - 2C_1^2) + \dots \tag{15}$$

Уравнение (13) допускает существование полюсов вида

$$Z = -\frac{2y_0^2}{y_0 - y}. \tag{16}$$

Однако при $A > 0$ войти в такой полюс нельзя. Из уравнения (13) следует также, что при $y > 0$ функция Z' в нуль не обращается. Поскольку при $y \to \infty$ единственно возможная асимптотика уравнения (13) определяется (при $A > 0$) формулой (15), тем самым существует трехпараметрическое семейство функций $\varphi(y)$, дающих решение уравнения (1). Эти параметры есть $\{A, C, C_1\}$.

Область физического коллапса всегда ограничена. Положим

$$\tilde{\varphi}(\rho) = \begin{cases} \varphi(\rho) & \text{при } y < y^*, \\ 0 & \text{при } y > y^*. \end{cases} \tag{17}$$

Точка y^* должна быть выбрана так, что

$$\varphi(0) \gg \varphi(y^*). \tag{18}$$

При соответствующем выборе параметров $\{A, C, C_1\}$ условие (18) можно выполнить если даже $y^* \tilde{<} 1$. Функция $\varphi(y)$ при таком выборе параметров $\{A, C, C_1\}$ имеет глубокий минимум, положение которого и следует взять за точку y^*. Обрезание решения в точке y^* приведет к появлению слабой отходящей волны $\psi_1(\rho, t)$, малость которой определяется неравенством (18). На рис. 1, 2 приведены значения функций $\varphi(y)$, $\tilde{\chi}(y)$ для двух наборов параметров: $\{A, C, C_1\} = \{4, 2, 2\}$ – рис. 1 и $\{A, C, C_1\} = \{3, 1, 1\}$ – рис. 2. Отношение $\varphi(0)/\varphi(y^*)$ для параметров на рис. 1 равно $\varphi(0)/\varphi(y^*) = 71.3$, $y^* = 2.26$.

Коллапсирующее решение уравнения (1) дается выражением

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \lambda\tilde{\varphi}(\rho\lambda)\exp\left\{-\frac{iC_1}{2}\ln(t_0 - t) + i\tilde{\chi}(\rho\lambda)\right\} + \psi_1(\rho, t), \tag{19}$$

где функция $\psi_1(\rho, t)$ есть решение линейного уравнения

$$i\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \Delta\psi_1 + 2|\psi|^2\psi_1 + \psi^2\psi_1 - \frac{iy^*\varphi(y^*)}{2(t_0 - t)}\delta\left(\rho - \frac{y^*}{\lambda}\right)e^{i\chi(\rho,t)} -$$
$$-\frac{\lambda\varphi(y^*)}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\delta\left(\rho - \frac{y^*}{\lambda}\right)e^{i\chi(\rho,t)}\right) = 0 \tag{20}$$

с начальным условием $\psi_1(\rho, t^*) = 0$, где t^* – момент начала коллапса.

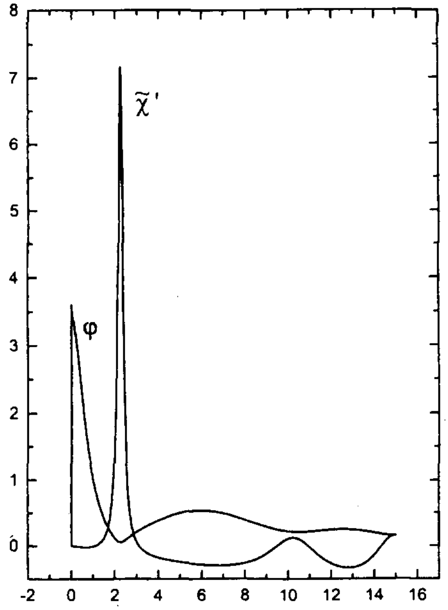

Рис.1. Зависимость $\varphi, \tilde{\chi}'$ для значений параметров $\{A, C, C_1\} = \{4, 2, 2\}$

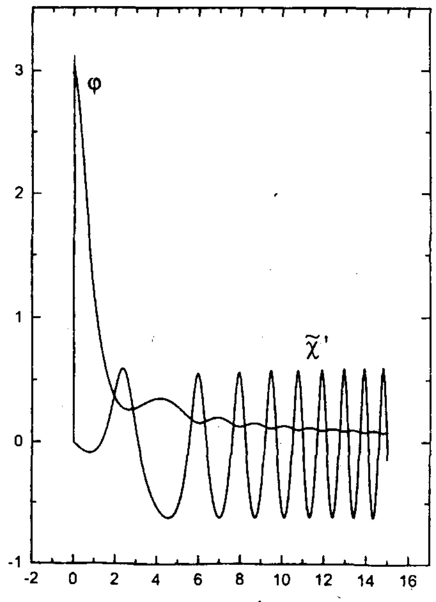

Рис.2. Зависимость $\varphi, \tilde{\chi}'$ для значений параметров $\{A, C, C_1\} = \{3, 1, 1\}$

Исследование проблемы устойчивости решения (19) и условий, при которых функция $\psi_1(\rho, t)$ остается малой поправкой к выражению (4), (19) выходит за рамки данной работы. Слабый коллапс рассматривался в работах [4, 5].

Коллапсирующее решение возникает в ограниченной области пространства, и для возникновения сингулярности необходимо создать начальное распределение специального вида. При численном моделировании или в реальных физических объектах коллапс будет возникать от таких флуктуаций, приводящих к коллапсу, вероятность появления которых близка к максимальной.

Автор благодарит С.П.Новикова, А.Б.Шабата, Е.А.Кузнецова за обсуждение результатов и ценные замечания.

Работа Ю.Н.Овчинникова поддержана грантом CRDF RP1-194.

---

1. В.Е.Захаров, ЖЭТФ **62**, 1746 (1972); Sov. Phys. JETP **35**, 908 (1972).
2. В.Е.Захаров, В.С.Сынах, ЖЭТФ **68**, 940 (1975); Sov. Phys. JETP **41**, 464 (1976).
3. A.Dyachenko, A.C.Newell, A.Pushkarev, and V.E.Zakharov, Physica **D57**, 96 (1992).
4. В.Е.Захаров, Л.Н.Щур, ЖЭТФ **81**, 2019 (1981).
5. В.Е.Захаров, Е.А.Кузнецов, ЖЭТФ **91**, 1310 (1986).