Письма в ЖЭТФ, том 69, вып.5, стр.391 - 394 © 1999г. 10 марта

ИЕРАРХИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ (НЕАДДИТИВНОЙ) ТЕРМОДИНАМИКИ

А.И.Олемской[1)]

Сумский государственный университет

244007 Сумы, Украина

Поступила в редакцию 28 января 1999 г.

Рассмотрено рекуррентное соотношение, приводящее к распределению вероятности микросостояний на разных иерархических уровнях неаддитивной статистической системы (для верхнего уровня оно сводится к распределению Цаллиса [1]). Описаны процессы образования и распада иерархического статансамбля.

PACS: 5.40.+j, 64.40.Ak

В последнее время широко обсуждается (см. [1] и ссылки там) обобщенное распределение Гиббса

$$P_q(\epsilon) \propto [1-(1-q)\beta\varepsilon]^{1/(1-q)}, \tag{1}$$

сводящееся к обычной экспоненциальной форме в пределе $q \to 1$ (β – обратная температура, ε – энергия микросостояния). Это распределение получается в рамках стандартной вариационной процедуры для обобщенной энтропии

$$S_q = (q-1)^{-1}\left(1-\sum_{\varepsilon} P^q(\varepsilon)\right)$$

при условиях

$$\sum_{\varepsilon} P(\varepsilon) = 1, \quad \langle\varepsilon\rangle_q \equiv \sum_{\varepsilon} \varepsilon P^q(\varepsilon) = \text{const}.$$

Такого рода обобщение использовано [2] при построении теории мультифрактальных множеств. Согласно [3], распределение (1) отвечает масштабно инвариантным статистическим системам, фазовое пространство которых обладает фрактальной структурой, а соответствующий статистический ансамбль является иерархически соподчиненным. Ниже мы рассмотрим модифицированное уравнение Фоккера – Планка, решение которого приводит к распределению по иерархическим уровням, на верхнем из которых реализуется зависимость (1).

Для самоподобных систем число узлов N_k на уровне $k = 1, 2, ..., k_m$ иерархического дерева представляется степенной зависимостью $N_k = k^a$, $0 < a < 1$ (см. [4]). Связь между соседними уровнями зададим функцией $U(P) = \varepsilon P^q$, $\varepsilon > 0$, $0 < q < 1$. Вероятности P_k реализации состояний на разных иерархических уровнях k свяжем рекуррентным соотношением [5]

$$P_{k-1} = P_k + N_k^{-1} U(P_k). \tag{2}$$

В континуальном приближении ($1 \ll k \ll k_m$) его решение дает

$$P_k \propto \left(1 - \frac{1-q}{1-a}\varepsilon k^{1-a}\right)^{1/(1-q)}. \tag{3}$$

---

1) e-mail: Alexander@olem.sumy.ua

Для полного ансамбля, отвечающего верхнему уровню $k = 1$, распределение (3) сводится к (1), если параметр $\varepsilon \equiv (1-a)\beta\varepsilon$. С ростом k вероятность P_k, как и следовало, спадает. Моменты распределения (3)

$$\langle k^n \rangle_q \equiv \int_1^{k_m} k^n P_k^q dk, \quad n = 1, 2, ...$$

имеют вид

$$\langle k^n \rangle_q = A((1-q)\beta\varepsilon)^{-n/(1-a)} \int_{x_1}^{x_2} x^{(n+a)/(1-a)} (1-x)^{q/(1-q)} dx, \tag{4}$$

где $x_1 = (1-q)\beta\varepsilon$, $x_2 = x_1 k_m^{1-a} \gg x_1$, постоянная нормировки A определяется условием

$$A \int_{x_1}^{x_2} x^{a/(1-a)} (1-x)^{q/(1-q)} dx \equiv \langle k^0 \rangle_q = 1.$$

В пределе $a \to 1$, отвечающем вырожденному иерархическому дереву, для которого на каждом уровне ветвится лишь один узел, выражение $(1-a)^{-1} k^{1-a}$ в распределении (3) переходит в $(j-1)^{-1} \ln k$, где $j > 1$ – показатель ветвимости. Для регулярного дерева, каждый узел которого испытывает постоянную ветвимость j, имеем $N_k = j^k$, и указанное выражение заменяется на $-j^{-k}/\ln j$ [5].

Нетрудно видеть, что в континуальном пределе $1 \ll k \ll k_m$ конечно-разностному уравнению (3) можно придать вид условия $J_k = 0$ для обобщенного потока $J_k = F_k P_k - D_k(\partial P_k/\partial k)$, задаваемого эффективной силой $F_k = -\varepsilon P_k^{q-1} \equiv -q^{-1}(\partial U/\partial P_k)$ и коэффициентом диффузии $D_k \equiv N_k$. Отсюда следует, что выражение (3) представляет стационарное решение уравнения Фоккера – Планка $\partial P_k/\partial t + \partial J_k/\partial k = 0$, t – время, которое описывает диффузию по узлам иерархического дерева. В автомодельном режиме, когда поведение системы определяется временной зависимостью $k_c(t)$ характерного уровня иерархии $1 \leq k_c \leq k_m$, распределение $P_k(t)$ представляется однородной функцией $P_k(t) = k_c^{\alpha}(t)\pi(\kappa)$, $\kappa \equiv k/k_c$ [4]. Условие нормировки дает показатель $\alpha = -1$, а подстановка в уравнение Фоккера – Планка приводит к зависимости $k_c^q \propto t$ и интегральному уравнению для функции $\pi(\kappa)$ (при $q = 1$ последнее, как и следовало, дает экспоненциальную зависимость $\pi(\kappa)$) [6]. Таким образом, с течением времени в поведении автомодельной системы становятся существенными все более глубокие иерархические уровни $k \sim t^{1/q}$, реализуемые с вероятностью $P_k(t) \propto t^{-1/q}$.

То обстоятельство, что характерное значение $k_c(t)$ монотонно нарастает со временем, позволяет использовать номер иерархического уровня k как эффективное время. При этом соотношение (2) представляется не как первый интеграл уравнения Фоккера – Планка, а как уравнение движения для перенормированой вероятности $0 < x_k < \infty$. Для введения последней рассмотрим самоподобную иерархическую систему, отвечающую однородному иерархическому дереву (отметим, что ранее условие самоподобия накладывалось на распределение состояний в фазовом пространстве, тогда как здесь оно характеризует ультраметрическое пространство, в котором распределены иерархически соподчиненные статансамбли). Для такой системы можно записать [4] $P_k = \xi^k x_k \equiv j^{-k/D} x_k$, где параметр подобия $\xi < 1$ определяется величиной фрактальной размерности $D = \ln j / \ln \xi^{-1}$, которая в свою очередь связана с использованным выше параметром q равенством $q = 1 - D$ [5]. В результате выражение (2) принимает форму уравнения Ландау – Халатникова

$$\frac{\partial x_k}{\partial k} = -\frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad V(x) \equiv \frac{\varepsilon}{1+q} x^{1+q} - \frac{\ln j}{2(1-q)} x^2. \tag{5}$$

Эффективный потенциал $V(x)$ имеет максимум в точке $x_c = ((1-q)\varepsilon / \ln j)^{1/(1-q)}$, которая в пределе $q \to 1$ смещается на бесконечность. Согласно (5), для включения нижних уровней иерархии система должна преодолеть барьер высотой $V_c = \varepsilon(1 - \varepsilon/2) x_c^{1+q}/(1+q)$, после чего x_k будет неограниченно нарастать с увеличением номера k иерархического уровня. Отметим, что такой переход в режим самовоспроизводящейся иерархии возможен только для неаддитивных систем ($q \neq 1$), причем минимальная высота барьера отвечает случаю $q = 0$, когда связь между уровнями $U(P) = \varepsilon$ максимальна. В пределе $x_k \gg x_c$ основной вклад в потенциал $V(x)$ дает квадратичное слагаемое и решение уравнения (5) принимает простой вид: $x_k = P_\infty j^{k/(1-q)}$, где P_∞ – постоянная интегрирования. При этом исходная вероятность $P_k \equiv j^{-k/D} x_k = P_\infty$ становится не зависимой от уровня иерархии. Хотя проведенные выкладки относятся к случаю однородного иерархического дерева, можно надеяться, что на качественном уровне вывод об активационном характере перехода к самовоспроизводящейся иерархии останется неизменным.

Как до образования иерархической структуры, так и после существенны стохастические эффекты, влияние которых может быть учтено добавлением в (5) белого шума с интенсивностью Θ, не сводящейся к температуре β^{-1}. Эти эффекты обусловливают флуктуационное преодоление барьера V_c, приводящее к зарождению иерархической структуры за время $T = \tau \exp(V_c/\Theta)$, где τ – масштаб релаксации. В то же время, по истечении времени $t_m = T + \tau k_m^q$ указанные флуктуации приводят к объединению ансамблей, отвечающих различным узлам иерархического дерева. В предположении, что барьеры, разделяющие эти ансамбли, определяются выражением Φk^{-D}, $\Phi > 0$, $D = 1 - q$, для времени образования единого ансамбля на иерархическом уровне k имеем $\tau_k = \tau \exp\{(\Phi/\Theta) k^{-D}\}$. Суммарная вероятность распада иерархической системы в момент времени t дается выражением

$$\mathcal{P}_q(t) = \sum_k P_k^q e^{-t/\tau_k}.$$

Тогда, используя метод перевала, нетрудно видеть, что максимальный вклад в указанную сумму дают слагаемые, определяемые уравнением $t \exp\{-(\Phi/\Theta) k^{-D}\} \approx (q/D)(1-q)^{-1}(\Theta/\Phi) k^{1+D}$. При умеренных временах $\tau < t < t_m$, когда экспонента сводится к единице, получаем решение автомодельного типа $k^{2-q} \propto t$, которому отвечает экспоненциальная зависимость $\mathcal{P}_q(t)$. В пределе $t \gg t_m$ имеем $k^{-D} \approx (\Theta/\Phi) \ln t$, и вероятность распада иерархической системы логарифмически нарастает со временем:

$$\mathcal{P}_q(t) \propto \left[1 - \frac{1-q}{1-a} \left(\frac{\Phi}{\Theta}\right)^{(1-a)/(1-q)} \varepsilon \left(\ln \frac{t}{\tau}\right)^{-(1-a)/(1-q)}\right]^{q/(1-q)}. \tag{6}$$

Именно эта стадия отвечает образованию единого термодинамического ансамбля, характеризуемого распределением Гиббса.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки Украины, (грант # 2.4/4).

---

1. C.Tsallis, Physica **A221**, 227 (1995).
2. T.C.Helsey, M.H.Jense, L.P.Kadanoff et al., Phys. Rev. **A33**, 1141 (1986).
3. P.A.Alemany, Phys. Lett. **A235**, 452 (1997).
4. A.I. Olemskoi, *Fractals in Condensed Matter Physics*, in: *Physics Reviews* **18**, part 1, Ed. I.M.Khalatnikov, Cordon and Breach, London, 1996.
5. A.I.Olemskoi and A.D.Kiselev, Phys. Lett. **A247**, 221 (1998).
6. А.И.Олемской, УФН **168**, 287 1998).