Письма в ЖЭТФ, том 69, вып.7, стр.491 - 496 © 1999г. 10 апреля

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ДВУХ КОНДЕНСАТОВ БОЗЕ – ЭЙНШТЕЙНА

В.А.Алексеев[1)]

Физический Институт им.П.Н.Лебедева РАН

117924 Москва, Россия

Поступила в редакцию 2 декабря 1998 г.

После переработки 26 февраля 1999 г.

Исследована видность интерференционной картины плотности двух сформированных в ловушках и перекрывающихся после отключения потенциала ловушек конденсатов Бозе – Эйнштейна. Для описания параметра порядка в рамках аппарата вторичного квантования используются когерентные волновые пакеты. Это приводит к уменьшению видности (visibility) интерференционных полос с увеличением времени задержки между моментами формирования конденсатов и наблюдением интерференции. Времена корреляции τ вычислены. В двух предельных случаях идеального и очень плотного газов время корреляции возрастает, $\tau \to \infty$, и результат совпадает с получающимся в рамках подхода, использующего уравнение Гросса – Питаевского. В условиях выполненного эксперимента [1] вычисленное время корреляции $\tau \approx 0.2$ с заметно превышает время удержания конденсата и предсказываемое уменьшение видности интерференционных полос плотности атомов может наблюдаться.

PACS: 03.75.Fi, 05.30.Jp

Недавно были выполнены эксперименты [1] по наблюдению интерференции плотности двух бозе-конденсатов. Захваченные в магнитную ловушку атомы пространственно разделялись лазерным лучом на две половины и охлаждались. После этого потенциал ловушки отключался, и конденсаты, расширяясь, перекрывались. В области перекрытия наблюдались интерференционные полосы плотности атомов.

Как в первоначальном предложении по постановке этого эксперимента [2], так и в последовавшем за его реализацией теоретическом описании [3, 4] авторы исходили из предположения, что образование интерференционных полос атомной плотности связано с возникновением параметра порядка (или макроскопической волновой функции конденсата) $\Psi(x) = \langle\hat{\Psi}(x)\rangle$, что означает нарушение инвариантности относительно калибровочных преобразований $U(1)$. Волновая функция конденсата является решением нелинейного уравнения Шредингера, в котором межатомное взаимодействие считается контактным, а $\hat{\Psi}$-оператор заменяется c-числом $\hat{\Psi}(x) \to \Psi(x)$ [5, 6]. Предполагается, что такое уравнение, называемое уравнением Гросса – Питаевского (УГП), полностью описывает состояние системы при температуре $T = 0$. При этом исчезает необходимость использования аппарата вторичного квантования.

Между тем такое описание интерференции не является единственно возможным. Предположение о формировании отличного от нуля значения $\langle\hat{\Psi}(x)\rangle \neq 0$ фактически эквивалентно предположению о том, что волновая функция конденсата является суперпозицией состояний $|N\rangle$ с разным числом частиц N. Мы полагаем, что эта суперпозиция имеет вид когерентного волнового пакета, использованного Андерсоном для описания явления сверхтекучести [7]:

$$\Psi = \sum_N A_N|N\rangle, \quad A_N = \pi^{-1/4}\Delta N^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(N-\bar{N})}{2\Delta N^2} + iN\varphi\right\}, \tag{1}$$

1) e-mail: valeks@sci.lebedev.ru

где φ – некоторая фаза.

Главным утверждением статьи является следующее. Использование для описания интерференции состояния (1) приводит к отсутствующему в подходе УГП новому качественному результату – уменьшению видности интерференционной картины с увеличением времени задержки между моментом образования (1) и наблюдением интерференции. По нашим оценкам, в условиях эксперимента [1] можно наблюдать такое уменьшение видности. Только в двух предельных случаях идеального и очень плотного газов (в последнем случае время корреляции растет очень медленно, $\tau \sim N^{1/10}$, и реализовать такие условия практически невозможно) описания с помощью состояний (1) и в рамках УГП приводят к одинаковым результатам. Поскольку о динамике формирования как состояния (1), так и макроскопической волновой функции в подходе УГП по существу ничего не известно, в настоящее время только эксперимент может показать, какое из описаний является правильным.

Рассмотрены две возможные постановки интерференционного эксперимента. В эксперименте первого типа (далее I), реализованном в [1], магнитная ловушка с захваченными атомами делится лазерным лучом на две половины, которые охлаждаются до конденсатного состояния, после чего удерживающий потенциал отключается и конденсаты перекрываются. Во втором случае (далее II), также обсуждавшемся в [1], но до настоящего времени, насколько нам известно, не реализованном, ловушка с охлажденными до конденсатного состояния атомами делится пополам и далее, после временной задержки, отключается потенциал.

Следуя [4], для описания интерференции конденсатов будем использовать функцию Вигнера

$$W(x,p,t) = \frac{1}{2\pi}\int \exp\left(-i\frac{py}{\hbar}\right)\langle\hat{\Psi}^{+}\left(x+\frac{y}{2}\right)\hat{\Psi}\left(x-\frac{y}{2}\right)\rangle dy, \tag{2}$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по состоянию конденсата.

В подходе УГП необходимость в таком усреднении отпадает. В этом случае $\hat{\Psi}(x)$ есть c-число

$$\Psi(x) = \psi_\alpha(x)\sqrt{N_\alpha}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mu_\alpha t\right) + e^{i\varphi}\psi_\beta(x)\sqrt{N_\beta}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mu_\beta t\right), \tag{3}$$

где $\psi_{\alpha,\beta}$ – решения нелинейного уравнения Шредингера для каждой из ловушек α, β с числом частиц $N_{\alpha,\beta}$, $\mu_{\alpha,\beta}$ – химические потенциалы, φ – некоторая фаза. Среднее принимает вид

$$\langle\hat{\Psi}^{+}(x)\hat{\Psi}(x')\rangle = \sum_{i,k=\alpha,\beta} g_{ik}\psi_i^*(x)\psi_k(x'), \tag{4}$$

$$g_{\alpha\alpha} = N_\alpha, \quad g_{\beta\beta} = N_\beta, \quad g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^* = \sqrt{N_\alpha N_\beta}\exp\left(\frac{i}{\hbar}(\mu_\alpha - \mu_\beta)t + i\varphi\right). \tag{5}$$

В случае идеального газа после отключения потенциала $W(x,p,t)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля, откуда легко заключить [4], что образуются интерференционные полосы плотности с видностью $V = 2|g_{\alpha\beta}|/(g_{\alpha\alpha} + g_{\beta\beta})$. При $N_\alpha = N_\beta = N/2$ из (5) получаем $V = 1$. Численное решение УГП показало [3], что взаимодействие частиц приводит к изменению структуры полос, однако видность по-прежнему равна единице.

В случае использования аппарата вторичного квантования при $T = 0$ в полевом операторе можно сохранить лишь функции основных состояний ловушек $\hat{\Psi}(x) = \hat{a}_\alpha \psi_\alpha(x) + \hat{a}_\beta \psi_\beta(x)$, после чего (4) сохраняет свой вид, однако функция корреляции равна среднему $g_{ik} = \langle a_i^+ a_k \rangle$ и (5) меняется. В остальном все сказанное об интерференции остается в силе.

Решение УГП вида (3) при $T = 0$ является единственно возможным. Попытка представить его в виде суперпозиции состояний (3) с разными N_α, N_β допустима только в случае идеального газа. В случае газа взаимодействующих частиц зависимость химического потенциала от числа частиц привела бы к временным осцилляциям как полного среднего числа частиц, так и числа частиц в каждом из конденсатов. Поэтому независимо от способа создания конденсатов в подходе УГП видность равна единице, $V = 1$, и не зависит от времени. Иначе обстоит дело в случае использования N-состояний и волновых пакетов.

Вычисление среднего значения с обычным состоянием $|N_\alpha, N_\beta\rangle$, соответствующим заданному числу частиц в каждом из конденсатов, приводит к результату $g_{\alpha\beta} = \langle a_\alpha^+ a_\beta \rangle = 0$, то есть интерференция исчезает. Однако при используемом способе охлаждения атомов, как отмечалось в [8], нет никаких оснований считать, что состояние конденсата является состоянием с заданным числом частиц. Допустим, например, что на заключительной стадии охлаждения волновая функция N атомов в ловушке имеет вид суперпозиции состояний $|N, 0, ...\rangle$, соответствующего N атомам в основном состоянии, и $|N-1, 1, 0, ...\rangle$, соответствующего $N-1$ атомам в основном состоянии и одному в первом возбужденном. Охлаждающее радиочастотное поле выбрасывает из ловушки возбужденный атом, переводя состояние $|N-1, 1, 0, ...\rangle$ в $|N-1, 0, ...\rangle$. В результате окончательное состояние оказывается суперпозицией состояний с числом частиц N и $N-1$. Ясно, что в общем случае в результате такого процесса при $T = 0$ состояние конденсата описывается суперпозицией функций $|N, 0, ...\rangle \equiv |N\rangle$ с разными N, и мы будем предполагать, что эта суперпозиция имеет вид (1).

Относительно амплитуд A_N, следуя Андерсону [7], предположим, что они имеют резкий максимум при $N = \bar{N}$ с дисперсией $\Delta N^2 \approx \bar{N}$. В этом случае в полевом операторе можно пренебречь слабой зависимостью функций $|N\rangle$, являющихся решением УГП (или эквивалентного ему уравнения Хартри – Фока) от числа частиц N, положив $|N\rangle = |\bar{N}\rangle$. После этого из (1) получаем значение

$$\langle \hat{\Psi} \rangle = \langle \hat{a} \rangle |\bar{N}\rangle = \sum_N A_{N-1} A_N \sqrt{N} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{N-1} - E_N)t + i\varphi} |\bar{N}\rangle, \tag{6}$$

совпадающее с решением УГП, если в (6) пренебречь небольшой разницей в коэффициентах $A_{N-1} \approx A_N$ положить $\sqrt{N} = \sqrt{\bar{N}}$, а разность энергий состояний приближенно представить в виде $E_N - E_{N-1} = \partial E/\partial N = \mu(\bar{N})$, пренебрегая следующими членами разложения (в случае идеального газа следующие члены отсутствуют и результат становится точным). Учитывая следующий член разложения и заменяя суммирование интегрированием, получаем

$$\langle \hat{a} \rangle = \sqrt{\bar{N}} \exp\left[-(t/\tau)^2 - i\frac{\mu}{\hbar}t + i\varphi \right], \quad \tau = 2\hbar/\Delta N s, \quad s = \partial\mu/\partial N. \tag{7}$$

В эксперименте типа I, когда конденсаты охлаждаются независимо, получаем $\langle \hat{a}_\alpha \hat{a}_\beta^+ \rangle = \langle \hat{a}_\alpha \rangle \langle \hat{a}_\beta^+ \rangle$, откуда находим

$$g_{\alpha\beta} = \langle \hat{a}_\alpha \rangle \langle \hat{a}_\beta^+ \rangle = \sqrt{\bar{N}_\alpha \bar{N}_\beta} \exp \left[- \left(\frac{t}{\tau_\alpha} \right)^2 - \left(\frac{t}{\tau_\beta} \right)^2 - i \frac{\mu_\alpha - \mu_\beta}{\hbar} t + i(\varphi_\alpha - \varphi_\beta) \right]. \quad (8)$$

Отсюда видно, что функция корреляции и, соответственно, видность интерференционной картины убывают с увеличением интервала времени t между моментом образования когерентного волнового пакета (1) и наблюдением интерференционных полос. Положив $\Delta N = \sqrt{\bar{N}}$, можно оценить время корреляции τ.

В случае разреженного газа поправка к энергии $E(N)$ основного состояния системы, вызванная взаимодействием частиц, вычисляется обычным образом: $\Delta E(N) = \langle N|U|N \rangle$, где

$$U = U_0 \hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0, \quad U_0 = \frac{2\pi a \hbar^2}{m} \int |\psi_0|^4 d\mathbf{r} = q\hbar\bar{\omega},$$

m – масса атома, a – длина рассеяния, ψ_0 – функция основного состояния в параболической ловушке, $\bar{\omega} = (\omega_x + \omega_y + \omega_z)/3$ – средняя частота ловушки и $q = \sqrt{2/\pi}(a/R)\sqrt{(\omega_x \omega_y \omega_z)/\bar{\omega}^3}$, $R = \sqrt{\hbar/(m\bar{\omega})}$. В итоге $E(N) = \hbar\bar{\omega}(3N/2 + qN^2)$. Естественно, при таком вычислении взаимодействие предполагается слабым: $qN \sim aN/R \ll 1$. Отсюда находим $\partial\mu/\partial N = \partial^2 E/\partial N^2 = 2\hbar\bar{\omega}q$ и $\tau \approx \omega^{-1}(\bar{N})^{-1/2} q^{-1}$.

В случае $qN \gg 1$ для вычисления химического потенциала можно воспользоваться "приближением Томаса – Ферми" [9, 10] $\mu = \frac{1}{2}\hbar\omega(15\bar{N}a/R)^{2/5}$, откуда находим $\tau \approx \omega^{-1} q^{-2/5} \bar{N}^{1/10}$.

Таким образом, с ростом числа частиц время корреляции сначала убывает $\sim N^{-1/2}$, достигая минимума $\tau \sim \omega^{-1} q^{-1/2} \sim 0.03$ с при $N \sim 10^3$ (в условиях [1] $\omega \sim 10^3$ с$^{-1}$, $q \sim 10^{-3}$), а затем очень медленно растет: $\tau \sim 0.05 N^{1/10}$ с. Формально при $N \to \infty$ получаем $\tau \to \infty$ и (8) совпадает с результатом (5), получающимся в подходе УГП. В условиях эксперимента [1], однако, $N \sim 10^6$ очень далеко от этого предела и $\tau \approx 0.2$ с. Это время гораздо больше времени перекрытия конденсатов ~ 0.04 с после отключения потенциала, однако много меньше времени удержания конденсатного состояния ~ 30 с. Поэтому возникает вопрос о начале отсчета времени в формуле (8), которую с этой точки зрения нельзя признать удовлетворительной. Заметим также, что если фазы в суперпозиции (1) произвольны, то результат много меньше, чем получающийся из (8). Прояснить ситуацию может экспериментальное исследование зависимости видности полос от времени задержки между формированием конденсата и отключением потенциала. Отметим, что замена суммирования по N интегрированием при получении (7) привела к подавлению возрождений функции корреляции связанных с возрождением параметра порядка, обсуждавшемся в [11].

Перейдем к обсуждению эксперимента типа II, когда сформировавшийся в ловушке конденсат делится на две части и после времени задержки τ потенциал отключается. При описании этого эксперимента не возникает необходимости предполагать нарушение $U(1)$.

Пренебрегая до деления взаимодействием частиц, волновую функцию N атомов можно записать в виде $\Psi(x_1 ... x_N) = \psi_0(x_1) ... \psi_0(x_N)$, где $\psi(x)$ – волновая функция основного состояния ловушки. После деления эта функция принимает вид

$$\Psi(x_1 ... x_N) = \tilde{\psi}(x_1) ... \tilde{\psi}(x_N), \quad \tilde{\psi}(x) = c_\alpha \psi_\alpha(x) + c_\beta \psi_\beta(x), \quad (9)$$

$$c_\alpha = \sqrt{\lambda}, \quad c_\beta = \sqrt{1-\lambda}e^{i\varphi}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Коэффициент λ и фаза φ отражают возможную асимметрию процесса деления. Далее важно начальное состояние (9) $|\tilde{N} = N\rangle = (N!)^{-1/2}(c_\alpha \hat{a}_\alpha^+ + c_\beta \hat{a}_\beta^+)^N|0\rangle$ представить в виде суперпозиции состояний $|N_\alpha, N_\beta\rangle = (N_\alpha! N_\beta!)^{-1/2}(a_\alpha^+)^{N_\alpha}(a_\beta^+)^{N_\beta}|0\rangle$ с числом частиц N_α, N_β в каждом из конденсатов. Вычисляя матричный элемент

$$\langle N_\alpha, N_\beta|\tilde{N} = N\rangle = c_\alpha^{N_\alpha} c_\beta^{N_\beta} \sqrt{\frac{N!}{N_\alpha! N_\beta!}}\delta_{N_\beta, N-N_\alpha},$$

находим волновую функцию двух конденсатов

$$|\tilde{N} = N\rangle = (c_\alpha c_\beta)^n \sum_k \left(\frac{c_\alpha}{c_\beta}\right)^k \sqrt{\frac{N!}{(n+k)!(n-k)!}}|n+k, n-k\rangle, \quad n = N/2. \qquad (10)$$

Суперпозиция (10), как и (1), представляет волновой пакет, однако фазы формирующих его состояний определяются процессом деления.

Заметим теперь, что при $c_\alpha \approx c_\beta \approx 1/\sqrt{2}$ (деление конденсата на две примерно равные части) слагаемые в (10) имеют резкий максимум при $k = 0$. В этом случае (10) применимо и для взаимодействующих частиц, если в качестве функций $\psi_{\alpha,\beta}$ использовать решение уравнений Хартри – Фока (или УГП) с числом частиц $N_\alpha = N_\beta = N/2$.

Далее необходимо учесть соотношение

$$\langle n+k, n-k|\hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\beta|n+k', n-k'\rangle = \delta_{k',k-1}\sqrt{(n+k)(n-k+1)}e^{(i/\hbar)Q(k)t},$$

где величина $Q(k)$ равна разности энергий состояний, которую удобно записать в виде

$$Q(k) = \mu_\alpha - \mu_\beta + S(k - 1/2), \quad S = \partial\mu_\alpha/\partial n + \partial\mu_\beta/\partial n = s_\alpha + s_\beta. \qquad (11)$$

После этого все суммы, появляющиеся при вычислении среднего $\langle \hat{a}_i^+ \hat{a}_k\rangle$ по состоянию (10) вычисляются точно, и мы находим

$$g_{ii} = N_i|c_i|^2, \quad g_{\alpha\beta}(N) = N c_\beta c_\alpha^* e^{\frac{i}{\hbar}(\mu_\alpha - \mu_\beta)t}\left(|c_\beta|^2 e^{-\frac{i}{2\hbar}St} + |c_\alpha|^2 e^{\frac{i}{2\hbar}St}\right)^{N-1}. \qquad (12)$$

В случае описания начального состояния конденсата волновым пакетом (1) функцию корреляции (12) надо еще усреднить по N. Вычисление показывает, что это приводит к дополнительной зависимости от времени, однако гораздо более медленной, чем уже имеющейся в (12). Другими словами, в этом случае описания начального состояния конденсата (до деления) волновой функцией с заданным числом частиц и волновым пакетом приводят к одинаковым результатам.

При равном числе частиц в конденсатах $|c_\alpha|^2 = |c_\beta|^2 = 1/2$ соответствующая (12) видность $V(t) = |\cos(St/2\hbar)|^{N-1}$ убывает от единицы при $t = 0$ до нуля за характерное время $t > \tau \approx 2\hbar/S\sqrt{N}$. С несущественными изменениями для времени корреляции τ справедливы те же оценки, которые были выполнены в случае I после формулы (8). Подчеркнем, однако, что в случае II время t определено однозначно: это время задержки между моментами деления конденсата и отключением потенциала.

На временах, кратных $\tau_1 = 4\pi 2\hbar/S$, как видно из (12), интерференция возрождается. Видность возрождающейся картины близка к начальной за исключением случая, когда одновременно выполняются два условия: $qN \gg 1$ и $|\mu_\alpha - \mu_\beta| \sim \mu_{\alpha,\beta}$, при которых неучтенный в (11) квадратичный по k член разложения ее подавляет.

Метод получения волновой функции (10) во многом аналогичен использованному в [12], однако в [12] авторы приходят к другому результату. Они утверждают, что временная задержка приводит только к диффузии фазы интерференционной картины, случайным образом флуктуирующей в разных реализациях эксперимента с одинаковыми временными задержками.

Уменьшение видности интерференционной картины и ее возрождения не укладываются в рамки подхода УГП. Экспериментальное наблюдение этих явлений или утверждение об их отсутствии может существенно углубить наши представления о процессе формирования и свойствах конденсатных состояний.

Мне приятно выразить благодарность А.Ф. Андрееву за полезные обсуждения.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 98-02-17502 и Государственной научно-технической программой "Метрология".

---

1. M.R.Andrews, C.G.Townsend, H.J.Miesner et al., Science **275**, 637 (1997).
2. W.Hoston and L.You, Phys. Rev. **A53**, 4254 (1996).
3. A.Rohrl, M.Naraschewski, A.Schenzle et al., Phys. Rev. Lett. **78**, 4143 (1997).
4. H.Wallis, A.Rohrl, M.Naraschewski et al., Phys. Rev. **A55**, 2109 (1997).
5. E.P.Gross, Nuovo Cim. **20**, 454 (1961).
6. Л.П.Питаевский, ЖЭТФ **40**, 646 (1961).
7. P.W. Anderson, Rev. Mod. Phys. **38**, 298 (1966).
8. А.Ф.Андреев, Письма в ЖЭТФ **63**, 963 (1996).
9. V.V.Goldman, I.F.Silvera, and A.J.Leggett, Phys. Rev. **B24**, 2870 (1981).
10. D.A.Huse and E.D. Siggia, J. Low Temp. Phys. **46**, 137 (1982).
11. E.M.Wright, D.F.Walls, and J.C.Garrison, Phys. Rev. Lett. **77**, 2158 (1996).
12. J.Javanainen and M.Wilkens, Phys. Rev. Lett. **78**, 4675 (1997).