Письма в ЖЭТФ, том 39, вып. 12, стр. 573 – 576 *25 июня 1984 г.*

НОВАЯ КОНЕЧНАЯ МОДЕЛЬ В $d = 2$

С.В.Кетов, И.В.Тютин

$N = 4$ суперсимметричная модель для скаляров и спиноров в размерности два получена размерной редукцией $N = 2$ вещественного кирального суперполя в $d = 4$. Обнаружено сокращение всех ультрафиолетовых расходимостей во всех порядках теории возмущений.

Появление в последнее время конечных квантовых теорий поля связано с развитием суперсимметрии. Наиболее известными примерами являются $N = 4$ суперсимметричное обобщение теории Янга – Миллса [1, 2] в $d = 4$ и $N = 4$ σ-модели специального вида [3] в $d = 2$. Теории с расширенной суперсимметрией обычно можно упростить, переформулировав их в пространстве-времени с более высокой размерностью. Так, $N = 4$ супер-Янг – Миллс в $d = 4$ можно сформулировать как $N = 1$ супер-Янг – Миллс [4] в $d = 10$, а $N = 4$ σ-модель в $d = 2$ – как $N = 1$ σ-модель [5] в $d = 6$. В этой статье мы описываем размерную редукцию $N =$

= 2 вещественного кирального суперполя [6] в $d = 4$ к $d = 2$. В результате получается $N =$ = 4 теория в $d = 2$ для взаимодействующих полей спина 0 и 1/2.

Суперсимметричные σ-модели в двумерном пространстве-времени хорошо известны. Общая теория имеет вид

$$L = \frac{1}{2} g_{ab}(A)\, \partial_\mu A^a \partial_\mu A^b + \text{суперсимметризация}, \tag{1}$$

где g_{ab} – метрика риманова многообразия W, координаты которого $\{A^a\}$. Расширенная суперсимметрия предполагает связи на метрику. В частности, $N = 2$ суперсимметрия требует Кэлерову [7] метрику. Наша модель может рассматриваться как частный случай теории с

$$L = \frac{1}{2} g_{ab}(A)\, \partial_\mu A^a \partial_\mu A^b + \frac{1}{2} g_{ab}(A)\, \partial_\mu B^a \partial_\mu B^b +$$
$$+ \frac{1}{2} f_{ab}(A)\, \epsilon_{\mu\nu}\, \partial_\mu B^a \partial_\nu B^b + \text{суперсимметризация}, \tag{2}$$

где антисимметричные коэффициенты f_{ab} наряду с g_{ab} фиксируются одной функцией. В частности, , многообразие W в нашем случае является Кэлеровым, но не риччи-плоским. Тем не менее, модель оказывается конечной.

$N = 2$ вещественное киральное суперполе удовлетворяет в суперпространстве уравнениям [8,9] :

$$\bar{D}_i^{\dot\alpha}\, \Phi = 0, \quad \frac{1}{12} D_i^{\alpha} D_{\alpha j} D^{\beta i} D_\beta^j\, \Phi = \Box \bar{\Phi}. \tag{3}$$

Решение (3) приводит к следующему супермультиплету в $d = 4$:

$$(\Phi,\ \psi^i,\ C_m,\ \tilde{F}_{\mu\nu}), \tag{4}$$

где Φ – комплексный скаляр, ψ^i – SU-(2) майорановский изодублет, C_m – вещественный изовектор, $\tilde{F}_{\mu\nu}$ – вещественный антисимметричный тензор, удовлетворяющий связи:

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, \partial_\nu \tilde{F}_{\lambda\rho} = 0. \tag{5}$$

После размерной редукции в $d = 2$, связи (5) можно разрешить непосредственно:

$$F_{01} = n = \text{const}, \quad F_{23} = D,$$
$$F_{\mu 2} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu}\, \partial_\nu (F + \bar{F}), \quad F_{\mu 3} = \frac{1}{2i} \epsilon_{\mu\nu}\, \partial_\nu (F - \bar{F}), \tag{6}$$

где $F_{\mu\nu}$ – тензор, дуальный $\tilde{F}_{\mu\nu}$. Таким образом, получается $N = 4$ супермультиплет в $d = 2$:

$$(\Phi,\ \psi^i,\ C_m,\ F,\ D), \tag{7}$$

где Φ и F – комплексные скаляры, ψ^i – дираковский изодублет, C_m – вещественный изовектор, D – действительный скаляр (8 + 8 компонент).

Соответствующие законы преобразования суперсимметрии имеют вид

$$\delta \Phi = \bar{\epsilon}_{iR}\, \psi_R^i + \bar{\psi}_R^i\, \epsilon_{iR},$$
$$\delta \psi^i = -\tau_{mj}^i C_m \gamma_5 \epsilon^j - i\not{\partial} \Phi \epsilon_L^i + i\not{\partial} \bar{\Phi} \epsilon_R^i - iD\epsilon^i + - 2n\gamma_5 \epsilon^i + i\not{\partial} \tilde{\epsilon}^i \bar{F},$$
$$\delta C_m = -\frac{1}{2} \bar{\epsilon}_i\, i\not{\partial} (\tau_m)_j^i\, \psi^j + h.c., \tag{8}$$

$$\delta F = -\,\bar{\epsilon}_i \gamma_5 \widetilde{\psi}^{\,i},$$

$$\delta D = -\,\frac{1}{2}\,\bar{\epsilon}_i \gamma_5 \not{\partial} \psi^i + h.c.,$$

где $\widetilde{\psi}^{\,i}$ – майорановски сопряженный спинор.

В качестве действия для взаимодействующей теории рассмотрим следующее выраженче в суперпространстве:

$$S = \int d^2x\, d^2\theta_R\, d^2\widetilde{\theta}_L\, V(\Phi) + h.c. \tag{9}$$

с аналитической функцией $V(\Phi) = -\,\frac{1}{4}\Phi^2 + V_{int}(\Phi)$, где Φ – суперполе (3), редуцированное к $d = 2$ и имеющее, вообще говоря, внешний индекс. После довольно длинных вычислений (9) приводит к следующему лагранжиану в компонентах:

$$\begin{aligned} L = {} & g_{ab}\,\partial_\mu \Phi^a \partial_\mu \bar{\Phi}^b - g_{ab}\,\bar{\psi}_R^{ia}\, i\not{\partial}\psi^b_{iL} - g_{ab}\,\bar{\psi}_L^{ia}\, i\overleftarrow{\not{\partial}}\psi^b_{iR} + g_{ab}\,C^a_m C^b_m + \\ & - g_{ab}\,n^a n^b + g_{ab}\,D^a D^b + g_{ab}\,\partial_\mu F^a \partial_\mu \bar{F}^b + 2i g_{ab}\,n^a D^b + \\ & + g_{ab}\,\epsilon_{\mu\nu}\,\partial_\mu \bar{F}^a \partial_\nu F^b - g_{abc}\,(\bar{\psi}^a_R \tau_m \psi^b_R)\, C^c_m + 2g_{abc}\,\bar{\psi}^a_{iR}\,\psi^{bi}_R\; n^c + \\ & + i g_{abc}\,\bar{\psi}^a_{iR}\,\psi^{bi}_R D^c - \frac{i}{2} g_{abc}\,[\,\bar{\psi}^a_{iR}\gamma_\mu \widetilde{\psi}^{bi}_L\;\partial_\mu \bar{F}^c + \bar{\widetilde{\psi}}{}^a_{iL}\gamma_\mu \psi^{bi}\partial_\mu F^c\,] + \\ & - \frac{1}{6} g_{abcd}\,(\bar{\psi}^{ia}_R\;\psi^{jb}_R)(\bar{\psi}^c_{iR}\;\psi^d_{jR} + \bar{\psi}^c_{jR}\,\psi^d_{iR}) + h.c., \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$g_{a_1\ldots a_n} = -\,\left.\frac{\partial^n V(\Phi)}{\partial\Phi^{a_1}\ldots\partial\Phi^{a_n}}\right|_{\Phi(x,\,\theta) = \Phi(x)}. \tag{11}$$

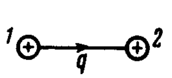
Поля C_m и D оказываются вспомогательными и могут быть устранены с использованием уравнений движения. Мы видим, что для случая $n^a = 0$, лагранжиан (10) действительно имеет вид теории (2) с кэлеровой метрикой. Можно считать, что теория (10) фиксируется двумя формами и их производными, которые в нашем случае определяются одной функцией $V(\Phi)$;

$$G = (g_{ab} + \bar{g}_{ab})\,d\Phi^a d\bar{\Phi}^b\,, \qquad E = (\bar{g}_{ab} - g_{ab})\,dF^a \wedge d\bar{F}^b\,, \tag{12}$$

причем E отсутствует в свободной теории.

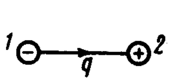
Постоянный вектор n^a генерирует спонтанное нарушение суперсимметрии. Этому соответствует голдстоуновское поведение в законе преобразования ψ^i для $n \neq 0$ в (8).

Для анализа возможных расходимостей функций Грина рассматриваемой модели удобно развить фейнмановскую технику непосредственно в суперпространстве [10, 11]. Как и в случае простой суперсимметрии, многие из киральных экспоненциальных факторов сокращаются [10], что позволило нам получить следующие правила Фейнмана:

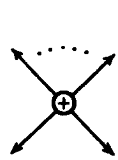


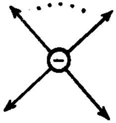
$= i\delta^4(\theta_1 - \theta_2)$

$= i\delta^4(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)$



$= \dfrac{-\,i}{q^2}\exp(-\,\theta_2 \not{q}\,\bar{\theta}_1)$


$= i\int d^4\theta\, V_{int}(\Phi)$



$$= i \int d^4 \bar{\theta}\, V_{int}(\bar{\Phi}).$$

Используя эти правила, можно оценить индекс расходимости произвольной диаграммы:

$$\omega \leqslant 2 - 2(V_- + V_+) + 4[\, min(V_+,\ V_-) - 1\,] \leqslant -2, \tag{13}$$

где $V_\pm$ – число вершин соответствующей киральности. Таким образом, модель является конечной в ультрафиолетовой области. Мы проверили этот результат, явно рассмотрев всевозможные суперграфы с точностью до трех петель.

В заключение авторы выражают благодарность О.В.Огиевецкому и М.А.Васильеву за полезные обсуждения.

Подробности вычислений будут опубликованы позднее.

Литература

1. *Mandelstam S.* Nucl. Phys., 1983, **B213**, 149.
2. *Brink L. et al.* Phys. Lett., 1983, **123B**, 323.
3. *Alvarez-Caume L., Freedman D.Z.* Comm. Math. Phys., 1981, **80**, 413.
4. *Brink L. et. al.* Nucl. Phys., **B121**, 77.
5. *Sierra G., Townsend P.K.* Phys. Lett., 1983, **124B**, 497.
6. *Kim J.* Los Angeles Preprint UCLA/83 /TEP / 1, 1983.
7. *Zumino B.* Phys. Lett., 1979, **87B**, 203.
8. *Firth R.J., Jenkins J.D.* Nucl. Phys., 1975, **B85**, 525.
9. *Siegel W., Gates S.J.* Nucl. Phys. , 1981, **B129**, 295.
10. *Salam A., Strathdee J.* Nucl. Phys., 1975, **B86**, 142.
11. *Grisaru M.T. et. al.* Nucl. Phys., 1979, **B159**, 429.

Институт сильноточной электроники
Академии наук СССР
Сибирское отделение

Томский
государственный университет
им. В.В.Куйбышева

Поступила в редакцию
16 апреля 1984 г.