Письма в ЖЭТФ, том 39, вып. 12, стр. 582 – 584 *25 июня 1984 г.*

МОНОПОЛЬ ДИРАКА КАК ЛАГРАНЖЕВА СИСТЕМА НА ПРОСТРАНСТВЕ РАССЛОЕНИЯ

М.А.Соловьев

Дана простая реализация глобального лагранжева описания относительного движения монополя и заряда, основанная на переносе динамики на пространство расслоения, эквивалентного расслоению Хопфа.

Ву, Янг [1] и Гройб, Петри [2] предложили описание квантовой динамики заряженной частицы и вполе монополя на языке теории расслоений, исключающем дираковскую нить сингулярностей. Расслоения [1, 2] нумеруются целым числом n, входящим в условие Дирака $2e\mu = n$, и строятся [2, 3] из расслоения Хопфа (точнее, гомотопически эквивалентного ему). В [4] показано, что переход на пространство расслоения возможен и полезен уже на уровне классической механики. Цель данной статьи – реализация лагранжевой системы на основе расслоения [5] $\dot{C}^2/U(1)$, что позволяет наиболее компактно и ясно представить как классическую динамику этой задачи, так и квантование. При принятой в [4] реализации $R^1 \times SU(2)/U(1)$ существенна техника [6] квантования на группе. Здесь ее удается избежать.

Коротко о смысле перехода на пространство расслоения. Он означает расширение конфигурационного пространства за счет добавления калибровочной степени свободы. Только после этого система монополь – заряд допускает лагранжево описание в целом, хотя и с помощью вырожденного лагранжиана. Сама по себе эта система не лагранжева. Используемая обычно в качестве лагранжиана функция

$$\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + e\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} \tag{1}$$

зависит от калибровки, сингулярна и неинвариантна относительно вращений. Соответствующее действие есть многозначный функционал траектории, и вариационный принцип приходится понимать локально [4, 7, 8]. Напротив, лагранжиан на пространстве расслоения определен глобально и инвариантен, а соответствующее действие однозначно. Вырожденности лагранжиана в гамильтоновом описании отвечает условие первичной связи, которое при квантовании приводит к соотношению $2e\mu = n$ и серии расслоений [1, 2].

Рассмотрим пространство C^2 пар комплексных чисел $(z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2})$. Будем использовать обозначение $\bar{z}\zeta = \bar{z}_1\zeta_1 + \bar{z}_2\zeta_2$ и определим проекцию на обычное пространство R^3 формулой $x_i = \bar{z}\sigma_i z$, где σ_i – матрицы Паули. В сферических координатах $r = r_1^2 + r_2^2$, $\theta = 2\,\mathrm{arcctg}\,(r_1/r_2)$, $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Пары вида $(z_1 e^{i\alpha}, z_2 e^{i\alpha})$, $e^{i\alpha} \in U(1)$ проектируются в одну точку x. Иначе говоря, если мы удалим точку нахождения монополя $x = 0$, то $\dot{R}^3 = R^3 - \{0\}$ служит множеством орбит, на которые расслаивает $\dot{C}^2 =$

$= C^2 - \{0\}$ действие калибровочной группы $U(1)$. Рассмотрим лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}[4(\bar{z}z)(\dot{\bar{z}}\dot{z}) + (\dot{\bar{z}}z - \bar{z}\dot{z})^2] + ie\mu\frac{\dot{\bar{z}}z - \bar{z}\dot{z}}{\bar{z}z} . \qquad (2)$$

Легко проверить, что если мы зададим какое-либо локальное сечение (например, положим $r_1 = r^{1/2}\cos(\theta/2)$, $r_2 = r^{1/2}\sin(\theta/2)$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi$), то (2) переходит в (1) с A соответствующей калибровке (в данном случае $A_r = A_\theta = 0$, $A_\varphi = (\mu/r)\,\mathrm{tg}(\theta/2)$). Сумма угловых скоростей входит в (2) линейно с коэффициентом $e\mu$, и соответствующее уравнение Лагранжа – Эйлера имеет вид тождества $0 = 0$, т. е. движение по калибровочной координате $\chi = \varphi_1 + \varphi_2$ полностью неопределено. Таким образом, лагранжиан (2) описывает динамику орбит, а не отдельной точки z. Остальные уравнения, проектируясь на $\dot{R}^3$, дают обычные уравнения движения заряда в поле монополя. Обозначим $p = \partial L/\partial\dot{\bar{z}}$, $\bar{p} = \partial L/\partial\dot{z}$. Совершая преобразование Лежандра, получим поверхность связи

$$\bar{z}p - z\bar{p} = 2ie\mu , \qquad (3)$$

на которой определен гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m\bar{z}z}\left(\bar{p}p - \frac{e^2\mu^2}{\bar{z}z}\right). \qquad (4)$$

Ограничение симплектической формы на поверхность (3) вырождено вдоль калибровочных орбит. После факторизации по ним получаем гамильтонову систему на $\dot{R}^3$, для которой, однако, не существует глобальных канонических координат [4, 8].

Вернемся в конфигурационное пространство. Рассмотрим пространство $\hat{\Omega}$ замкнутых траекторий в $\dot{C}^2$, начальной и конечной точкой которых служит z_0. Определяемое лагранжианом (2) действие S является на них однозначным функционалом. Наряду с траекторией $z(t)$, $t \in [0, 1]$ будем рассматривать ее проекцию $x(t)$, а также отображение отрезка $[0, 1]$ в окружность, сопоставляющее точке t калибровочную координату $\chi(t)$. Если $z(t)$ и $z'(t)$ обладают одной проекцией, а соответствующие им отображения в окружность накрывают ее одинаковое число раз, то $S(z) = S(z')$. Факторпространство пространства $\hat{\Omega}$ по этому отношению эквивалентности односвязно и служит накрывающим для пространства Ω траекторий $x(t)$, $x(0) = x(1) = x_0$. Его роль аналогична роли римановой поверхности в теории аналитических функций – переход к нему превращает исходный многозначный функционал действия в однозначный [8].

Лагранжиан (2) явно инвариантен относительно действия на пространстве расслоения группы $SU(2)$

$$z \to uz, \qquad u \in SU(2). \qquad (5)$$

Это действие является автоморфизмом расслоения и индуцирует действие $SO(3) = SU(2)/Z_2$ на $\dot{R}^3$. Преобразованию $u = \exp(-ian_i\sigma_i)$ соответствует поворот на угол $2a$ с осью вращения $\mathbf{n}$. Таким образом, инвариантность лагранжиана (2) относительно преобразований (5) явно выражает симметрию задачи относительно вращений, которая формально утрачивается в стандартной записи (1). Симметрии (5) лагранжиана (2) отвечает сохраняющаяся величина

$$\frac{1}{2i}(\bar{p}\sigma_i z - \bar{z}\sigma_i p). \qquad (6)$$

При указанном выборе коэффициента она в точности совпадает с угловым моментом $J_i = m\epsilon_{ijk}x_j\dot{x}_k - e\mu x_i/r$.

Перейдем к квантованию. Заменяем p на $-i\partial/\partial\bar{z}$ и $\bar{p}$ на $-i\partial/\partial z$ в формулах (3), (4), (6). Условие связи (3) принимает вид $\partial/\partial\chi = ie\mu$ и конкретизирует зависимость волновой функции от калибровочной координаты

$$\Psi(z) = e^{ie\mu\chi}\,\psi(r_1, r_2, \varphi). \tag{7}$$

Поскольку при одновременном увеличении $\varphi_{1,2}$ на 2π волновая функция не должна меняться, возникает соотношение Дирака на заряды $2e\mu = n$, после чего формуле (7) можно придать вид

$$\Psi(ze^{i\alpha}) = e^{in\alpha}\,\Psi(z), \quad e^{i\alpha} \in U(1). \tag{8}$$

Если $|n| > 1$ волновая функция не меняется при увеличении углов на $2\pi/n$, т. е. фактически определена на факторпространстве $\dot{C}^2/Z_n$, которое гомотопически эквивалентно [3] линзе L_n. При естественном определении действия калибровочной группы $[z]e^{i\alpha} = [ze^{-i\alpha/n}]$ оно превращается в расслоение, для которого (8) служит условием эквивариантности [2]. Так воспроизводится серия расслоений [1,2]. Действие (5) диктует следующее представление группы вращений в пространстве волновых функций

$$\Psi(z) \to \Psi(u^{-1}z).$$

Такое представление рассматривалось в [9]. Мы видим, что оператор (6) является его генератором. При четных n оно однозначно, поскольку матрица $u = -I$ не сдвигает точек линзы с четным индексом, и фактически действует $SO(3)$. При нечетных n представление (9) двузначно, и собственные значения оператора (6) полуцелые.

Возможностью перенести описание динамики на пространство расслоения автора заинтересовал И.С.Шапиро. К изложенному результату привело обсуждение с Б.Л.Вороновым, В.Д.Скаржинским, И.С.Шапиро и, особенно, В.Я.Файнбергом.

Литература

1. *Wu T.T., Yang C.N.* Phys. Rev., 1975, **D12**, 3845.
2. *Greub W., Petry H.R.* J. Math. Phys., 1975, **16**, 1347.
3. *Соловьев М.А.* Письма в ЖЭТФ, 1982, **35**, 540.
4. *Balachandran A.P., Marmo G., Skagerstam B.-S., Stern A.* Nucl. Phys., 1980, **B162**, 385; Lecture Notes in Physics, v. 188, Berlin: Springer, 1983,
5. *Trautman A.* Int. J. Theor. Phys., 1977, **16**, 561.
6. *Balachandran A.P., Borchardt S., Stern A.* Phys. Rev., 1978, **D17**, 3247.
7. *Horváthy P.A.* Lecture Notes in Mathematics, v. 836, Berlin: Springer, 1980, p. 68.
8. *Новиков С.П.* УМН, 1982, **37**, 3.
9. *Horváthy P.A.* Int. J. Theor. Phys., 1981, **20**, 697.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 апреля 1984 г.