

## СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС МЕЖДУ ПРЕДЕЛЬНЫМИ ЦИКЛАМИ. ПРУЖИННЫЙ МАЯТНИК В ТЕРМОСТАТЕ

Ю.Н.Горностырев, Д.И.Ждахин, М.И.Кацнельсон, А.В.Трефилов<sup>+</sup>

Институт физики металлов Уральского отделения РАН  
620219 Екатеринбург, Россия

<sup>+</sup>Российский научный центр "Курчатовский институт"  
123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 марта 1999 г.

На примере классической модели пружинного маятника с кратным соотношением частот малых колебаний (модель Витта – Горелика) методом численного моделирования изучено влияние белого шума на синхронизацию фаз. Показано, что в исследованной модели реализуется режим резонанса Ферми для системы в термостате. Обнаружен новый тип нелинейной динамики – стохастический резонанс между предельными циклами.

PACS: 05.45.Xt

Проблема влияния шума (например, тепловых флуктуаций) на динамическое поведение сложных нелинейных систем традиционно исследовалась в связи с изучением различных сценариев возникновения турбулентности [1]. При этом предполагалось, что основную роль играют явления, связанные с возникновением хаоса в детерминистских системах, а флуктуации не приводят к качественным изменениям в поведении этих систем. В последнее время внимание исследователей стали привлекать наблюдаемые в самых различных процессах (от химических реакций до эволюции климата Земли) явления, связанные со стохастическим резонансом (СР) [2, 3], в которых шум может играть "конструктивную" роль. СР проявляется как более или менее периодическое поведение системы с несколькими положениями равновесия под действием случайных сил, в простейшем случае – белого шума. Естественно поставить вопрос о возможности явлений, родственных СР, в системах с аттракторами более сложной природы, чем положение равновесия (фокус), например, с предельными циклами [4]. Хотя родственные проблемы уже обсуждались (динамическая перемежаемость и детерминированный СР в системах с хаотическим поведением [3]), индуцированные шумом переходы между предельными циклами до сих пор не рассматривались. Предельные циклы описывают автоколебания, а также синхронизацию фаз в системах с несколькими степенями свободы; нас будет интересовать последний случай. В настоящей работе, при исследовании известного в физике молекул [5] и кристаллов [6] явления резонанса Ферми, продемонстрирован аналог СР между предельными циклами.

Наиболее наглядной моделью, описывающей резонанс Ферми, является модель пружинного маятника с соотношением частот малых колебаний 1:2 (модель Витта – Горелика [7]). В отсутствие шума и диссипации она описывается лагранжианом

$$L = 1/2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y), \quad (1)$$

$$V = \frac{k}{2}(r - l)^2 + gr(1 - \cos \phi) =$$

$$= 1/2 \left\{ \omega_0^2 [x^2 + (y+1)^2] + 2(\Omega_0^2 - \omega_0^2) \sqrt{x^2 + (y+1)^2} - 2\Omega_0^2(y+1) + \frac{(\Omega_0^2 - \omega_0^2)}{\omega_0^2} \right\},$$

где  $\omega_0 = \sqrt{k}$ ,  $\Omega_0 = \sqrt{g/l}$  – частоты малых колебаний грузика на пружине и маятника, соответственно,  $k$  – жесткость пружины (масса грузика равна 1),  $g$  – ускорение свободного падения,  $r$  – длина пружины,  $l$  – ее значение в равновесии,  $\phi$  – полярный угол,  $x, y$  – декартовы координаты в единицах  $l$  (начало координат совпадает с точкой подвеса). При этом рассматриваются значения параметров, для которых выполняется близкое к кратному соотношение частот  $\omega_0 = 2\Omega_0 + \Delta$ ,  $\Delta \ll \Omega_0$ . Эта модель описывает классический режим резонанса Ферми, например, для С–Н-связи в органических молекулах [5]. Правда, буквально для этого случая классический предел  $T \gg \hbar\omega_0$  реально недостижим, так как  $\hbar\omega_0 \geq 10^3$  К, однако, как было показано в [6], модель (1) при малых  $x, y$  описывает также явления, родственные резонансу Ферми для фононов в определенной точке зоны Бриллюэна ОЦК фазы щелочных и щелочноземельных металлов, где классический случай как раз и представляет основной интерес. При учете затухания фононов (диссипации) и взаимодействия с термостатом в этой системе возможно явление синхронизации [6], в результате которого некоторая комбинация фаз двух колебаний перестает быть случайной величиной и при достаточно малом  $\Delta$  истинное соотношение частот колебаний устанавливается в точности в отношении 1:2 (захват фазы). С точки зрения общей теории динамических систем, синхронизация соответствует бифуркации тора в предельный цикл [4]. При численном решении соответствующих уравнений движения для исследуемой системы в случае малых амплитуд колебаний оказалось [8], что она имеет два режима синхронизации, то есть два предельных цикла. Вместе с наглядностью исходной механической системы это делает модель Витта – Горелика подходящим объектом для решения интересующей нас проблемы.

Влияние шума и диссипации на динамику системы исследовалось путем численного решения уравнений Ланжевена

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} &= f_x(t), \\ \ddot{y} + 2\Gamma \dot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} &= f_y(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\gamma, \Gamma$  – коэффициенты затухания (порядка  $10^{-2}\omega_0$ ),  $f_i$  – гауссовы случайные силы типа "белый шум" с корреляторами

$$\begin{aligned} \langle f_x(t) f_x(t') \rangle &= 4T\gamma\delta(t-t'), \\ \langle f_y(t) f_y(t') \rangle &= 4T\Gamma\delta(t-t'), \\ \langle f_x(t) f_y(t') \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Такой выбор корреляторов гарантирует достижение гиббсовского распределения с температурой  $T$  в состоянии термодинамического равновесия ( $t \rightarrow \infty$ ) [9]. Для численного решения системы стохастических дифференциальных уравнений (2) использовался один из "сильных" (среднеквадратичных) методов, предложенный в [10]. Методы такого типа гарантируют сходимость не только для величин, усредненных по реализациям случайной силы, но и для индивидуальных траекторий (подробнее см. [11] и цитированную там литературу). Использованные нами в предыдущей работе [8] "слабые" методы не позволили сделать определенные выводы о характере динамического поведения исследуемой системы, кроме установления самого факта синхронизации.

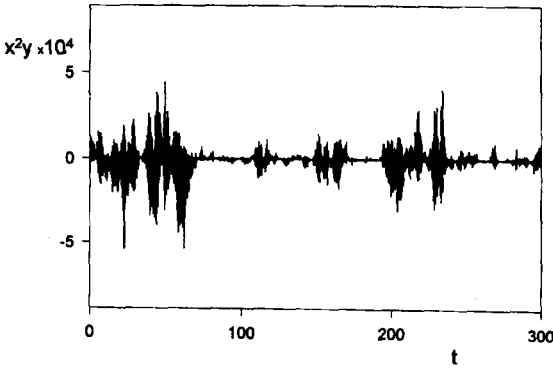


Рис.1. Типичная зависимость  $x^2(t)y(t)$  в стационарном режиме при  $\Delta = 0$ ,  $T = 0.025$ ,  $\gamma = 0.005$  и  $\Gamma = 0.005$

Исходными величинами для анализа являются траектории  $x(t)$ ,  $y(t)$  в стационарном режиме, который контролировался по совпадению (с точностью до 0.1%) функции распределения от скоростей  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  с максвеловским распределением. Межмодовую перекачку энергии удобно исследовать, следя за величиной  $x^2(t)y(t)$ . Типичный ее вид при  $\Delta = 0$  и не слишком высоких температурах  $T \ll \omega_0^2 l^2$  показан на рис.1. Последнее неравенство гарантирует малость амплитуды колебаний (для значений параметров, соответствующих рис.1,  $|x| \leq 0.1$ ,  $|y| \leq 0.05$ ). При этом, как следует из (1), произведение  $x^2 y$  пропорционально энергии межмодового взаимодействия.

Из рис.1 видно, что динамика межмодовой перекачки энергии является весьма сложной, с чередованием участков сильной и слабой связи. На рис.2 приведены результаты для "отфильтрованной" переменной:

$$s(t) = \Omega_0 \int_{t-n\pi/\Omega_0}^{t+n\pi/\Omega_0} x^2(t')y(t') \cos(4\Omega_0 t') dt' \quad (4)$$

(на рис.2  $n = 2$ ). Переменная  $s(t)$  позволяет непосредственно следить за возникновением или разрушением режима синхронизации фаз, поскольку она пропорциональна  $\cos \Phi$ , где  $\Phi = 2\phi_x + \phi_y$ ,  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  — фазы переменных  $x$ ,  $y$ . Как показано в [8], двум предельным циклам соответствуют значения  $\Phi \approx 0$  и  $\Phi \approx \pi$ , так что положительность  $s(t)$  в течение достаточно большого времени соответствует движению по первому предельному циклу, а отрицательность — по второму.

Как видно из рис.2, области синхронизации (I) перемежаются с областями хаотического движения, когда  $s \approx 0$ . Кроме того, наблюдаются быстрые переходы с одного предельного цикла на другой (II), до некоторой степени аналогичные "пролетным" траекториям в бистабильной системе [11]. Спектральная плотность величины  $s(t)$  имеет хорошо выраженный максимум (рис.3), так что чередование временных интервалов, где происходит синхронизация фаз, носит приблизительно периодический характер. Наблюдаемая низкочастотная динамика аналогична в этом смысле СР, который реализуется в данной системе несмотря на отсутствие нескольких положений равновесия. Их роль играют предельные циклы (области типа I на рис.2).

С ростом интенсивности шума (увеличением температуры) частота "резонанса" растет, а сам он уширяется. Для выявления температурного поведения обсуждаемых эффектов на рис.3 приведена спектральная плотность, обезразмеренная на характерный уровень теплового шума  $T^3$ . Интенсивность пика с ростом  $T$  изменяется немонотонно, что демонстрирует "конструктивную" роль шума в его формировании. Такое поведение как раз является характерной чертой СР [2]. Из проведенных нами

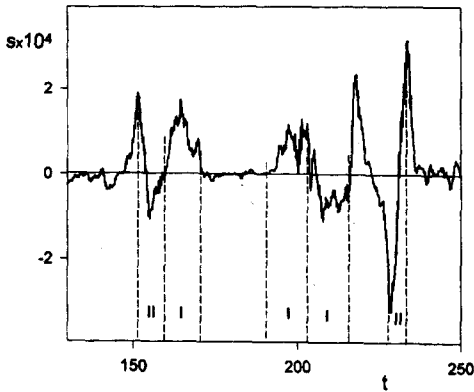


Рис.2. Зависимость  $s(t)$  (см. выражение (4)) при тех же параметрах, что и на рис.1. Участки, соответствующие синхронизации фаз (предельным циклам), обозначены I, быстрым переходам между предельными циклами – II

расчетов следует, что картина не меняется во всем интервале значений расстройки частоты  $\Delta$ , когда вообще существует синхронизация ( $\Delta \leq 0.1\omega_0$  для выбранных значений затухания), а характеристики СР (определяемые из спектра Фурье) слабо зависят от  $\Delta$ .

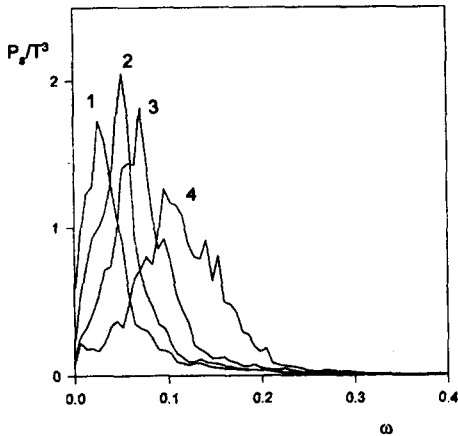


Рис.3. Отношение спектральной плотности  $P_s(\omega) = |s_\omega|^2$  к  $T^3$  при  $\Delta = 0$ ,  $\gamma = 0.005$  и  $\Gamma = 0.005$ . Кривые 1–4 приведены для  $T = 0.0002$ ,  $0.0005$ ,  $0.001$  и  $0.0025$ , соответственно

Фурье-спектры для координат  $x$  и  $y$  (рис.4) демонстрируют расщепление основных пиков, которое, собственно, и является аналогом резонанса Ферми [5]. Выполненные нами расчеты в отсутствие диссипации и случайных сил согласуются с аналитическими результатами [7] о зависимости интенсивности "верхнего" и "нижнего" пиков от начальных условий. При наличии шума происходит усреднение по начальным условиям и всегда присутствуют оба пика.

В заключение отметим, что, по нашему мнению, продемонстрированное здесь явление стохастического резонанса между предельными циклами может оказаться достаточно общим. Для этого необходимо наличие более чем одного предельного цикла, соответствующего синхронизации фаз, что, как видно, имеет место уже в такой простой и естественной модели, как пружинный маятник. Имея в виду возможное применение полученных результатов к резонансу Ферми в колебательных спектрах молекул и фононных спектрах металлов, было бы интересно рассмотреть поведение системы в квантовом случае. В квазиклассическом приближении последний опи-

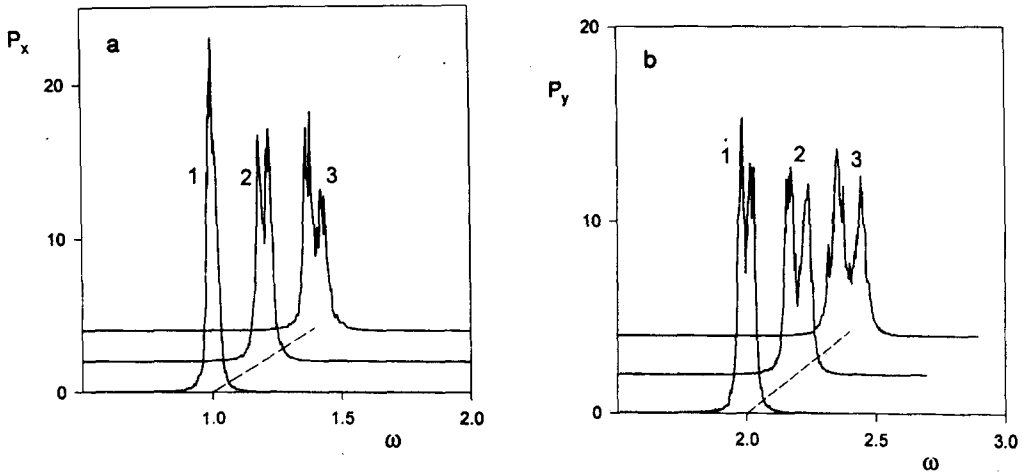


Рис.4. Спектральные плотности  $P_x(\omega) = |x_\omega|^2$  и  $P_y(\omega) = |y_\omega|^2$ , нормированные на единицу при  $\Delta = 0$ ,  $\gamma = 0.005$  и  $\Gamma = 0.005$ . Кривые 1–3 приведены для  $T = 0.001$ ,  $0.0025$  и  $0.005$ , соответственно. Для удобства начало координат кривых 2, 3 смещено

сывается цветным (так называемым голубым) шумом в уравнении типа уравнения Ланжевена [12]. К сожалению, для численного моделирования таких систем использовались лишь "слабые" методы [12], а "сильные" даже не разработаны. Вопрос о специфике явлений, родственных синхронизации фаз и СР, в квантовых системах представляет большой интерес и мог бы быть изучен с помощью таких методов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 98-02-16219.

1. J.-P.Eckmann, Rev. Mod. Phys. **53**, 643 (1981); Г.Шустер, *Детерминированный хаос*, М.: Мир, 1988.
2. L.Gammaitoni, P. Hänggi, P.Jung, and F.Marchesoni, Rev. Mod. Phys. **70**, 223 (1998).
3. В.С.Анищенко, А.Б.Нейман, Ф.Мосс, Л.Шиманский-Гайер, УФН, **169**, 7 (1999).
4. А.А.Андронов, А.А.Витт, С.Э.Хайкин, *Теория колебаний*, М.: Физматгиз, 1959; *Странные аттракторы*, сб. статей под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова, М.: Мир, 1981; В.И.Арнольд, В.С.Афрайнович, Ю.С.Ильяшенко, Л.П.Шильников, *Теория бифуркаций*, М.: ВИНТИ, "Современные проблемы математики", т.5, 1986.
5. М.П.Лисица, А.М.Яремко, *Резонанс Ферми*, Киев: Наукова думка, 1984.
6. М.И.Кацнельсон, А.В.Трефилов, ЖЭТФ **97**, 1891 (1990).
7. А.А.Витт, Г.С.Горелик, ЖТФ **3**, 294 (1933).
8. Ю.Н.Горностырев, М.И.Кацнельсон, А.П.Платонов, А.В.Трефилов, ЖЭТФ **107**, 925 (1995).
9. Н.Г.Ван Кампен, *Стохастические процессы в физике и химии*, М.: Высшая школа, 1984.
10. G.N.Milshstein and M.V.Tret'yakov, *Weierstrass-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik*, Preprint, IAAS No 102, Berlin, 1994.
11. Ю.Н.Горностырев, М.И.Кацнельсон, А.В.Трефилов, Письма в ЖЭТФ **56**, 542 (1992); Yu.N.Gornostyrev, M.I.Katsnelson, A.V.Trefilov, and S.V.Tretjakov, Phys. Rev. **B54**, 3286 (1996).
12. U.Eckern, W.Lehr, A.Mentzel-Dorwath et al., J. Stat. Phys. **59**, 885 (1990).