РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПИСЬМА
В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ *ТОМ 62, ВЫПУСК 2*
ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД *25 ИЮЛЯ, 1995*

Журнал поддерживается в 1995 году Российским фондом фундаментальных исследований по проекту N 95 – 02 – 91007

Письма в ЖЭТФ, том 62, вып.2, стр.81 - 86

О РЕДУКЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ В НЕОДНОРОДНЫХ КВАНТОВЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТИПА КАЛУЗЫ-КЛЕЙНА

А.А.Кириллов

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики
603005 Нижний Новгород, Россия

Поступила в редакцию 13 июня 1993 г.

Показано, что ранняя стадия эволюции Вселенной при $n < 10$ характеризуется тем, что объем произвольной пространственно-подобной гиперповерхности размерности $m < n - 2$ сжимается. Показано, что такое поведение не зависит от выбора начального квантового состояния и может обеспечить механизм редукции дополнительных пространственных измерений.

Как известно, различные теории объединения [1] предсказывают наличие дополнительных пространственных измерений. Предполагается, что в настоящее время по дополнительным измерениям Вселенная имеет размер порядка планковского, а сами лишние измерения проявляют себя в виде обычной материи, как набор скалярных и векторных полей. Однако при обращении к самым ранним моментам развития Вселенной (вблизи космологической сингулярности) подобная картина перестает работать и следует ожидать, что в этот период все измерения играют равную роль. Это позволяет привлекать для описания ранней Вселенной различные многомерные теории гравитации и, в то же время, ставит вопрос о механизме компактификации дополнительных измерений [2].

В качестве подобного механизма может быть использован тот факт, что вблизи сингулярности локальное поведение неоднородного гравитационного поля оказывается сильно анизотропным [3-5]. В то время, как по одним направлениям происходит расширение элемента пространственного объема, по другим происходит его сжатие (казнеровский режим). Подобное поведение можно было бы интерпретировать как динамическую редукцию числа измерений, если бы не одно обстоятельство. Во-первых, при $n < 10$ (n - число пространственных измерений) казнеровский режим неустойчив - происходит чередование таких режимов, а во-вторых, при $n \geq 10$ число направлений, по которым происходит сжатие, оказывается зависящим от положения в пространстве. В этом смысле размерность пространства должна зависеть от того, в какой части Вселенной мы находимся.

В настоящей работе мы рассмотрим квантовое поведение неоднородных многомерных моделей вблизи сингулярности и покажем, что по крайней мере при $n < 10$ размерность, равная трем, оказывается выделенной в том смысле, что в процессе космологического расширения происходит сжатие пространства вдоль произвольных гиперповерхностей размерности $m < n - 2$.

Как показано в [5], поведение неоднородного гравитационного поля вблизи сингулярности может быть описано в рамках асимптотической модели, $n+1$-мерный интервал для такой модели представляется в казнеровской форме

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \sum_{a=0}^{n-1} e^{q^a} (\ell^a)^2 \ , \tag{1}$$

где $\ell^a = \ell^a_\alpha dx^\alpha$ - казнеровские векторы, содержащие только $n(n-1)$ произвольных функций пространственных координат. В главном порядке динамика гравитационного поля определяется поведением только масштабных функций q^a, в то время как векторы ℓ^a_α играют пассивную роль. Эволюция масштабных функций описывается действием [5]

$$I = \int_S \left\{ p_a \frac{\partial q^a}{\partial t} - \lambda \left\{ \sum p^2 - \frac{1}{n-1} (\sum p)^2 + U \right\} \right\} d^n x dt, \tag{2}$$

где λ выражается через функцию хода $\lambda = N/\sqrt{g}$. Потенциал в (2) может быть представлен в виде $U = -gR^n = \sum \lambda_A g^{\sigma_A}$, где коэффициенты λ_A являются функциями всех динамических переменных и их производных, а показатели σ_A даются выражениями $\sigma_{abc} = 1 + Q_a - Q_b - Q_c$, $b \neq c$, где Q_a - параметры анизотропии: $Q_a = q^a / \sum q$. В асимптотике $g = \exp(\sum q) \to 0$ потенциал U моделируется потенциальными стенками [5, 6]

$$g^{\sigma_A} \to \theta_\infty[\sigma_A(Q)] = \begin{cases} +\infty\ , & \sigma_A < 0 \\ 0\ , & \sigma_A > 0 \end{cases}$$

и оказывается не зависящим от казнеровских векторов.

Конфигурационное пространство M системы (2) (суперпространство) представляется в форме прямого произведения $M = \prod_{x \in S} M_x$. Поскольку ниже нас будет интересовать поведение локальных характеристик пространства в отдельной точке $x \in S$, то достаточно рассмотреть только один член M_x в данном произведении. Подобное ограничение оказывается возможным благодаря тому, что в асимптотике $g \to 0$ динамика степеней свободы M_x не зависит от остальных членов прямого произведения, что является следствием крупномасштабности гравитационного поля [5].

Пространство M_x является обычным n-мерным псевдоевклидовым пространством. В гармонических переменных часть действия (2), относящаяся к M_x, принимает вид, формально совпадающий с действием для релятивистской частицы (для простоты полагаем $(\Delta x)^n = 1$):

$$I = \int \left\{ P_a \frac{\partial z^a}{\partial t} - \lambda' (P_i^2 + U - P_0^2) \right\} dt, \qquad (3)$$

где $\lambda' = \lambda / n(n-1)$, а переменные z^a определяются соотношением $q^a = A_j^a z^j + z^0$ $(j = 1, ..., n-1)$ с постоянной матрицей (см. [5])

$$A_j^a = \sqrt{\frac{n(n-1)}{j(j+1)}} (\theta_j^a - j\delta_j^a), \quad \theta_j^a = \begin{cases} 1, & j > a, \\ 0, & j \le a. \end{cases}$$

Как показано в [7], квантование подобной системы проводится в полной аналогии с квантованием релятивистских частиц [8]. Наличие гамильтоновой связи приводит к уравнению Уилера – де-Витта [9]

$$(\Delta + U + \xi P)\Psi = 0, \qquad (4)$$

где Ψ – волновая функция, описывающая квантовые состояния степеней свободы M_x,

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_A \sqrt{-G} G^{AB} \partial_B,$$

G_{AB} – метрика, задаваемая интервалом

$$\delta\Gamma^2 = \frac{1}{4\lambda'}((\delta z^i)^2 - (\delta z^0)^2),$$

P – скаляр кривизны на M_x. Значение константы ξ следует выбирать равным $\xi = (n-2)/4(n-1)$, что обеспечивает конформную инвариантность (4), отражающую произвол в выборе функции хода λ.

Используя переменные Мизнера – Читра [6, 5] (см. также [10])($\mathrm{y} = y^j$)

$$z^0 = -e^{-\tau} \frac{1+y^2}{1-y^2}, \qquad \mathrm{z} = -2e^{-\tau} \frac{\mathrm{y}}{1-y^2}, \qquad y = |\mathrm{y}| \le 1, \qquad (5)$$

метрику на M_x можно представить в виде

$$\delta\Gamma^2 = \frac{e^{-2\tau}}{4\lambda'} \left(\frac{4(\delta y^j)^2}{(1-y^2)^2} - (\delta\tau)^2 \right). \qquad (6)$$

В данных переменных параметры анизотропии Q_a и, следовательно, потенциал $U(Q)$ оказываются не зависящими от временной переменной τ:

$$Q_a(y) = \frac{1}{n} \left\{ 1 + \frac{2A_j^a y^j}{1+y^2} \right\}.$$

Ниже, для простоты, мы будем использовать калибровку $4\lambda' e^{2\tau} = 1$.

Пространственно-подобная часть конфигурационного пространства M_x представляет собой $(n-1)$-мерное пространство Лобачевского, а потенциал U ограничивает его часть K [5]

$$\sigma_{abc} = 1 + Q_a - Q_b - Q_c \ge 0, \qquad a \ne b \ne c. \qquad (7)$$

Тогда полный ортонормированный набор $\{u_p, u_p^*\}$ решений уравнения (4) составляют функции вида

$$u_J = \frac{1}{\sqrt{2k_J}} \exp(-ik_J\tau)\varphi_J(y) \ , \tag{8}$$

где φ_J – собственные функции оператора Лапласа – Бельтрами:

$$(\Delta_y + k_J^2 + \frac{(n-2)^2}{4})\varphi_J(z) = 0, \qquad \varphi_J \mid_{\partial K} = 0, \tag{9}$$

а оператор Δ_y строится с помощью метрики $dl^2 = h_{ij}dy^i dy^j = 4(dy)^2/(1-y^2)^2$. В случае $n < 10$ область K имеет конечный объем и J принимает только дискретные значения $(J = 0, 1, 2, \ldots)$. При $n \geq 10$ объем области K бесконечен и спектр оказывается непрерывным.

Вероятностная интерпретация вводится с помощью выделения положительно-частотного сектора H^+ в пространстве H решений уравнения (4) (см. [7,8]). Таким образом, произвольную волновую функцию Ψ, описывающую физические состояния гравитационного поля в точке x, можно представить в виде

$$\Psi = \sum_J A_J u_J \ , \ < \Psi \mid \Psi > = \sum \mid A_J \mid^2 = 1, \tag{10}$$

где A_J – произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям. Отметим, что состояния (8) играют роль стационарных состояний гравитационного поля, однако геометрия, соответствующая данным состояниям, нестационарна (поскольку метрика содержит временную переменную τ в явном виде) [7]. Вероятность того, что масштабные функции локализованы в точке $O = (y^i, \tau) \in M_x$, дается выражением $P(y,\tau) = |\langle \Phi(y,\tau) \, | \Psi \rangle|^2$, где $\Phi(y,\tau) = \sum_J \sqrt{k_J} u_J^*(y,\tau) \, u_J$ – локализованные состояния Ньютона-Вигнера [8]. Таким образом, для произвольно выбранного начального состояния получим $P(y,\tau) = \left|\sum_J \sqrt{k_J} u_J^*(y,\tau) \, A_J\right|^2$.

Рассмотрим теперь произвольную m-мерную гиперповерхность $\Xi^m \subset S$. Элемент объема данной гиперповерхности имеет вид $dV^m = \sum g^{\mu_{a_1,\ldots,a_m}} C_{a_1,\ldots,a_m} \ell^{a_1} \bigwedge \ldots \bigwedge \ell^{a_m}$, где $\mu_{a_1,\ldots,a_m} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m Q_{a_i}$, а $C_{a_1,\ldots,a_m}(x)$ – произвольные постоянные функции, задающие положение гиперповерхности в S. Таким образом, поведение данного элемента со временем определяется величинами типа g^{μ_m}. В квантовой теории подобные величины, как и сам объем, являются операторами и должны быть среднены по квантовому состоянию.

Оказывается, что в асимптотике $(g \to 0)$ при $n \leq 9$ поведение со временем различных m-мерных объемов обнаруживает универсальные свойства. Это происходит благодаря тому, что основной вклад в средние типа $\langle g^{\mu_m} \rangle$ дается малой окрестностью точек $y^* \in K$, в которых показатели μ_m принимают минимальные значения. Такие точки лежат на границе ∂K, а минимальные значения для показателей даются выражениями $\mu_m^* = -m(n-m-2)/2(n+m)$ при $m < n-2$, $\mu_{n-2}^* = \mu_{n-1}^* = 0$ и $\mu_n \equiv 1/2$. В частности, $2\mu_1$ определяет минимальную допустимую величину параметров анизотропии Q_{min} [5]. Поскольку $\varphi_J(\partial K) = 0$, то вблизи границы ∂K имеем $\varphi_J \approx \eta_J(\mu - \mu^*)$ и плотность вероятности принимает вид (мы полагаем $n > 3$):

$$P_\tau(\mu) = \int_K P(y,\tau)\,\delta(\mu - \mu(y))\,\sqrt{h} d^{n-1}y \approx B_m(\tau)\,(\mu - \mu^*)^n$$

$\mu \to \mu^*$.

Таким образом, в пределе $g \to 0$ для моментов функции g^{μ_m} получим выражение ($L > 0$)

$$\left\langle \left(g^{\mu_m}\right)^L \right\rangle = D_m (L, \tau) \frac{\left(g_*^{\mu_m^*}\right)^L}{\left(L \ln 1/g_*\right)^{n+1}}, \tag{11}$$

где $g_* = g(\tau, y^*)$, а D_m – медленно (логарифмически) меняющаяся со временем функция, зависящая от выбора начального квантового состояния. При $m < n-2$ имеем $\mu_m^* < 0$ и, следовательно, объем произвольной гиперповерхности Ξ^m, размерности меньше чем $n-2$, оказывается сжимающимся (отметим, что это еще не решает проблемы компактификации лишних измерений, а лишь показывает начальную тенденцию к подобной компактификации; вопрос же о более поздней стадии и ее устойчивости остается открытым [2]). Таким образом, в ранней Вселенной число пространственных измерений может эффективно редуцироваться до трех. Закон расширения оставшегося трехмерного пространства (сопряженного $n-3$-мерной гиперповерхности) можно оценить как $V_3 \sim g^{\frac{3}{2}k}$, где $k = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \mu_{n-3}\right) = (n-2)/(2n-3)$, что соответствует эффективному уравнению состояния вещества $p = \frac{n}{3n-6}\epsilon$ (напомним, что вблизи сингулярности $g \sim t^2$, где t – синхронное время).

При рассмотрении размерностей, превышающих $n = 9$, ситуация меняется принципиально. В этом случае потенциал в (4) уже не ограничивает пространственно-подобную часть конфигурационного пространства (область K имеет бесконечный объем) и, следовательно, стационарные состояния (8) уже не являются локализованными в терминах показателей μ. Если приготовить локализованное по μ состояние (волновой пакет), то такой пакет со временем начинает расплываться, а его центр тяжести убегает на бесконечность конфигурационного пространства (в классической теории это соответствует тому, что эволюция метрики описывается устойчивым казнеровским режимом). Таким образом, различные средние (и число коллапсирующих направлений) оказываются существенно зависящими от выбора начального состояния.

В заключение отметим, что в классической теории при $n < 10$ эволюция метрики приобретает стохастические свойства [5], которые описываются инвариантной мерой (см. также [10]). Используя эту меру, можно также получить оценки для поведения средних m-–мерных объемов. Оказывается что эти оценки совпадают с (11) с точностью до логарифмического множителя (с заменой $n \to n-2$ в (11) и уже постоянными D_m). Однако отметим, что в классической теории подобные оценки имеют ограниченное значение, поскольку необходимость в вероятностном описании возникает как результат роста неопределенности в задании начальных условий. В квантовой же теории описание является вероятностным с самого начала и только средние значения различных операторов имеют физический (экспериментальный) статус.

Я благодарен Дж. Монтани, который обратил мое внимание на то, что казнеровское поведение метрики при космологическом коллапсе с показателями разного знака можно интерпретировать как эффективную динамическую редукцию размерности пространства.

Работа частично поддержана Российским исследовательским проектом "Космомикрофизика".

1. M.B. Green, J.H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge Univ. Press, 1988.
2. A. Chodos and S. Detweiler, Phys. Rev. **D21**, 2176 (1980); M. Demianski, Z. Golda, M. Heller and M. Szydlowski, Class. Quantum Grav. **3**, 1196 (1986); *ibid.*, **5**, 733 (1988); K. Maeda and P.Y. Pang, Phys. Lett. **180B**, 29 (1986).
3. В.А. Белинский, Е.М. Лифшиц, И.М. Халатников, ЖЭТФ **62**, 1606 (1972); В.А. Белинский, И.М. Халатников, ЖЭТФ **63**, 1121 (1972).
4. J. Demaret, M. Henneaux and P. Spindel, Phys. Lett. **164B** 27 (1985); J. Demaret *et al.*, *ibid.* **175B**, 129 (1986); A. Hosoya, L.G. Jensen and A. Stein-Schabes, Nucl.Phys. **238B**, 657 (1987); Y. Elskens and M. Henneaux , *ibid.* **290B**, 111 (1987).
5. А.А.Кириллов, ЖЭТФ **103**, 721 (1993); A.A. Kirillov and V.N. Melnikov, Phys. Rev. D **51**, No.12 (1995). G. Montani, *Proc. of 7th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, WSP, Singapore 1994.
6. C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A.Wheeler, *Gravitation.* **2**, Freeman, San Francisco, 1973.
7. A.A. Kirillov, Int. Jour. Mod. Phys. **D3**, 431 (1994); Письма в ЖЭТФ **55**, 540 (1992); A.A. Kirillov and V.N.Melnikov, Preprint CBPF-NF-037/95, Rio de Janeiro, Brazil, 1995.
8. S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, New York: Harper and Row, 1961.
9. B.S. de Witt, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).
10. В.Д. Иващук, А.А.Кириллов, В.Н.Мельников, Письма в ЖЭТФ **60**, 225 (1994).