Письма в ЖЭТФ, том 40, вып. 1, стр. 38 – 41 *10 июля 1984 г.*

О КОНЕЧНОСТИ $N = 4$ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ СИГМА-МОДЕЛЕЙ

Я.И.Коган, А.Ю.Морозов, А.М.Переломов

Показано, что двумерная суперсимметричная КЗ сигма-модель не перенормируется во всех порядках теории возмущений. Приведены аргументы в пользу зануления β-функции для всех $N = 4$ суперсимметричных (СУСИ) двумерных сигма-моделей.

1. Четырехмерная $N = 4$ суперсимметричная (СУСИ) теория Янга – Миллса конечна [1]. Естественным обобщением этого утверждения является гипотеза конечности всех теорий с максимальной суперсимметрией, в частности, $N = 8$ супергравитации. Эта гипотеза допускает проверку и на более простых примерах, в первую очередь на двумерных сигма-моделях. Максимально допустимой суперсимметрией для σ-моделей является $N = 4$, реализуемая на гиперкэлеровых многообразиях M, с необходимостью являющихся риччи-плоскими [2]. Лагранжиан кэлеровой ($N = 2$ СУСИ) σ-модели имеет вид

$$\frac{1}{\alpha}\int g_{\alpha\bar\beta}(\Phi, \bar\Phi) D\Phi^\alpha \overline{D\Phi^\beta}\, d^2z\, d^2\theta\ ;$$

$$D = \frac{\partial}{\partial\bar\theta} - i(\sigma\theta)\frac{\partial}{\partial z}\ ;\ \ \Phi^\alpha(x, \theta) = \phi^\alpha(x) + \bar\theta\psi^\alpha(x) + \frac{1}{2}\bar\theta\theta F^\alpha(x). \qquad (1)$$

Бозонные поля $\phi^\alpha(z, \bar z)$ являются координатами на многообразии M с кэлеровой метрикой $g_{\alpha\bar\beta}(\phi, \bar\phi)$, а их суперпартнеры $\psi^\alpha(z, \bar z)$ лежат в касательном пространстве к M [3], α пробегает значения от 1 до $\dim_C M$. Многообразия с гиперкэлеровой метрикой [2] существуют только для четных комплексных размерностей M, и простейшие примеры есть при $\dim_K M = 4$. Это асимптотически локально евклидовы (АЛЕ) гравитационные инстантоны (ГИ) и многообразия типа КЗ [4], первые определяют некомпактные, а вторые – компактные σ-модели. Утверждение о занулении β-функции для $N = 4$ СУСИ σ-моделей высказано в [2], там же сделана попытка доказать его для ГИ-моделей. Насколько мы понимаем, это доказательство основано на понятии конформного веса и потому использует неочевидное предположение об отсутствии постоянных на M тензоров с ненулевым конформным весом. Мы приводим несколько иные рассуждения, требующие, однако, более подробных знаний о риччи-плоских многообразиях. Рассуждения доведены до конца для КЗ моделей, но обобщаемы и на другие случаи.

2. Квантовые поправки к действию (1), сохраняющие $N = 2$ СУСИ имеют вид $\int T_{\alpha\bar\beta}(\Phi, \bar\Phi) \times$ $\times\ D\Phi^\alpha \overline{D\Phi^\beta}\, d^2z\, d^2\theta$, причем $T_{\alpha\bar\beta}$-кэлеров тензор, выражающийся в одной петле через мет-

рику: $$T^{(1)}_{\alpha\bar\beta} \sim \partial_\alpha \partial_{\bar\beta} |\ln\det g_{\mu\bar\nu}| \sim R_{\alpha\bar\beta}\ , \qquad (2)$$

а в высших порядках – через скаляр S, зависящий от тензора кривизны и его ковариантных производных:

$$T^{(2,\dots)}_{\alpha\bar\beta} = \partial_\alpha \partial_{\bar\beta} S^{(2,\dots)} \qquad \left(\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\phi^\alpha}\ ;\quad \partial_{\bar\beta} = \frac{\partial}{\partial\bar\phi^\beta}\right) \qquad (3)$$

например, $T^{(2)}_{\alpha\bar\beta} \sim \partial_\alpha\partial_{\bar\beta} R$ [5]. Важно, что эти формулы не зависят от конкретного выбора многообразия M, и что начиная с двух петель квантовые поправки выражаются через вторые производные от несингулярных скаляров S-инвариантов общекоординатных преобразований на M. Дополнительное условие сохранения $N = 4$ СУСИ включает в себя риччи-плоскостность метрики $g_{\alpha\bar\beta} + T_{\alpha\bar\beta}$, т. е. $\partial_\alpha\partial_{\bar\beta}\ln\det(g+T) = 0$. В п. 3 мы покажем какие условия возникают при этом на $T_{\alpha\bar\beta}$, а в п. 4 докажем, что в случае КЗ из этих условий следует отсутствие поправок вида (3). Однопетлевая поправка (2) пропорциональна тензору Риччи и зануляется сама по себе.

3. Условие риччи-плоскостности метрики $g + T$ (в вещественном представлении) имеет вид $R_{ij}(g_{kl} + T_{kl}) = 0$. Отсюда немедленно получается уравнение на T_{ij} : $\Delta_L T_{ij} \equiv \nabla^k\nabla_k T_{ij} + [\nabla_i, \nabla_k] T_j^{k} + [\nabla_j, \nabla_k] T_i^{\cdot k} = 0$. Используя уравнение для коммутатора ковариантных производных и условие $R_{ij} = 0$, можно получить следующее выражение $\Delta_L T_{ij} = \nabla^k\nabla_k T_{ij} - 2R_{ikjl}T^{kl} = 0$. В кэлеровом случае имеем: $(\nabla^\alpha\nabla_\alpha)T_{\beta\bar\gamma} + [\bar\nabla_\gamma, \overline{\nabla^\delta}]T_{\beta\bar\delta} + [\bar\nabla_\beta, \nabla^\delta]T_{\delta\bar\gamma} = 0$. Имеется следующее полезное тождество:

$$\frac{1}{2}\Delta_L T_{\beta\bar\gamma} = \nabla^\alpha(\nabla_\alpha T_{\beta\bar\gamma} - \nabla_\beta T_{\alpha\bar\gamma}) + \nabla_\beta\nabla^\alpha T_{\alpha\bar\gamma}\,. \qquad (4)$$

Введем в пространство тензоров стандартным образом положительно определенное скалярное произведение $< T_{\alpha\bar\beta}, T_{\alpha\bar\beta} > \equiv \int \overset{*}{T}_{\alpha\bar\beta} T_{\alpha\bar\beta}\, d\mu(\phi)$. Тогда из (4) получаем:

$$- < T_{\alpha\bar\beta}, \Delta_L T_{\alpha\bar\beta} > = < \nabla_\alpha T_{\beta\bar\gamma} - \nabla_\beta T_{\alpha\bar\gamma},\ \ \nabla_\alpha T_{\beta\bar\gamma} - \nabla_\beta T_{\alpha\bar\gamma} > + 2 < \nabla^\alpha T_{\alpha\bar\gamma}, \nabla^\beta T_{\beta\bar\gamma} > . \quad (5)$$

Поэтому условие $\Delta_L T_{\alpha\bar\beta} = 0$ эквивалентно двум условиям :

$$\nabla_\alpha T_{\beta\bar\gamma} - \nabla_\beta T_{\alpha\bar\gamma} = \partial_\alpha T_{\beta\bar\gamma} - \partial_\beta T_{\alpha\bar\gamma} = 0 + \text{компл. сопряженное условие}, \qquad (6)$$

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\bar\gamma} = 0 + \text{компл. сопряженное условие}. \qquad (7)$$

Отметим, что (6) есть просто условие кэлеровости тензора $T_{\alpha\bar\beta}$. Далее из (6) получаем $\nabla^{\bar\gamma} T_{\beta\bar\gamma} = \nabla_\beta(T^{\bar\gamma}_{\bar\gamma}) = \partial_\beta(T^\gamma_\gamma)$. Но, в силу (7) $\nabla^{\bar\gamma}T_{\beta\bar\gamma} = 0$ и $\partial_\beta T^\gamma_\gamma = 0$, откуда следует $T^\gamma_\gamma = \text{const}$. Это условие будем использовать в дальнейшем при изучении КЗ.

4. КЗ – это односвязное комплексное многообразие с первым классом Чженя $C_1 = 0$. Поэтому, согласно теореме Яу [6], все КЗ допускают риччи-плоскую кэлерову метрику $g_{\alpha\bar\beta}$. Недавно было показано, что такая метрика на КЗ всегда существует. При этом группа голономии такой метрики редуцируется от $SO(4) = SO(3) \times SO(3)$ до $SO(3) \simeq Sp(1)$, т. е. метрика допускает гиперкэлерову структуру. Известно, что на этих многообразиях существует конечное число алгебраических 2-циклов $\sim CP_1$ (Ф.Богомолов, частное сообщение), и, следовательно, в двумерных КЗ σ-моделях существуют инстантонные решения (они могут оказаться полезными, см. п. 5). Известно, что эйлерова характеристика КЗ $\chi = 24$, т. е. число гармонических 2-форм $b_2 = \chi - 2 = 22$. Сигнатура Хирцебруха $\tau = b_2^+ - b_2^- = 16$. Таким образом имеется $b_2^+ = 19$ автодуальных гармонических 2-форм и $b_2^- = 3$ антиавтодуальных. Из них 20 форм имеют тип (1,1), одна тип (2, 0) и одна – тип (0, 2), причем две последние антиавтодуальны (тип формы определяется в спинорном представлении). Все эти сведения взяты нами из статьи Пэйджа [7]. Кэлеровы тензоры второго ранга, удовлетворяющие уравнению $T^\gamma_\gamma = 0$ строятся перемножением авто- и антиавтодуальных форм типа (1, 1). Все-

го имеется 19 таких произведений и все определенные таким образом тензоры $T_{\alpha\bar{\beta}}$ бесследовы. Используя определение тензора $T_{\alpha\bar{\beta}}$ (3) получаем уравнение $T^{\gamma}_{\gamma} = \Delta S = 0$. Это уравнение не имеет решений отличных от константы в классе *несингулярных* скаляров. S=const приводит к нулевому тензору $T_{\alpha\bar{\beta}}$. Это ясно с самого начала, все $T_{\alpha\bar{\beta}}$, построенные указанным образом, связаны с гомотопической нетривиальностью КЗ и отвечают сингулярным скалярам. Важно, что пертурбативные поправки в сигма-моделях универсальны и "не знают" о нетривиальной структуре многообразия.

Вообще говоря имеются возможные решения с $T^{\gamma}_{\gamma} = \text{const} \neq 0$. Но, как доказано Хитчиным (см. [7]), решение уравнения $\Delta_L T_{\alpha\bar{\beta}} = 0$ в случае $T^{\gamma}_{\gamma} \neq 0$ только одно. Понятно, что это $cg_{\alpha\bar{\beta}}$. Однако, $g_{\alpha\bar{\beta}}$ является второй производной от кэлерового потенциала, который, как известно, не может быть функцией, глобально определенной на КЗ. Этим завершается доказательство конечности КЗ сигма-модели.

В следующем пункте мы предположим, что единственная возможная перенормировка в эффективном лагранжиане сводится к изменению коэффициента перед затравочным действием (1).

5. Покажем, что происходит с инстантонным вычислением β-функции [8, 9] в случае риччи-плоских многообразий M. β-функция при этом выражается через числа нулевых бозонных n_B и фермионных n_F мод в поле инстантона. При условии $n_F = n_B$, осуществляющемся для однородных кэлеровых многообразий [9], β-функция содержит только однопетлевой вклад; нулевой β-функции соответствует $n_F = 2n_B$. Чем может быть вызвано такое соотношение между n_F и n_B? Флуктуации бозонных полей вокруг инстантонного решения $\phi_{inst}(z)$ удовлетворяют уравнениям [8]

$$\frac{\partial}{\partial z} g_{\bar{\alpha}\beta} \frac{\partial}{\partial z} \phi^{\beta}_{(\epsilon)} = \epsilon^2 g_{\bar{\alpha}\beta} \phi^{\beta}(\epsilon), \quad g_{\alpha\bar{\beta}} = g_{\alpha\bar{\beta}}(\phi_{inst}, \overline{\phi_{inst}}), \tag{8}$$

а флуктуации фермионных полей — уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi^{\beta}_{L(\epsilon)} = \pm \epsilon \psi^{\beta}_{R,(\epsilon)}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} g_{\bar{\alpha}\beta} \psi^{\beta}_{R,(\epsilon)} = \pm \epsilon g_{\bar{\alpha}\beta} \psi^{\beta}_{L,(\epsilon)}. \tag{10}$$

Индексы R и L обозначают правые и левые компоненты спиноров. Ясно, что для любых ненулевых мод $(\epsilon \neq 0)$ $\psi^{\beta}_{L,(\epsilon)} = \phi^{\beta}_{(\epsilon)}$ и $\psi^{\beta}_{R,(\epsilon)} = \pm \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} \phi^{\beta}_{(\epsilon)}$, т. е. на каждую бозонную моду приходится две фермионных[1]. Нулевые моды требуют, однако, отдельного рассмотрения. По-прежнему сохраняется взаимно-однозначное соответствие между бозонами и *левыми* фермионными модами, $\psi^{\beta}_{L,(0)} = \phi^{\beta}_{(0)}$, т. е. $n_{F,L} = n_B$. Что касается правых нулевых мод, то они не могут иметь вид $(\partial/\partial z)\phi^{\beta}_{(0)}$, поскольку бозонные нулевые моды соответствуют переходам между близкими инстантонными решениями и являются аналитическими функциями z, $(\partial/\partial \bar{z})\, \phi^{\beta}_{(0)} = 0$. Число правых нулевых мод можно найти с помощью теоремы об индексе. Индекс оператора Дирака пропорционален тензору Риччи: $\partial_{\bar{\alpha}} \Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma} \sim$ $\sim R_{\bar{\alpha}\beta}$ [9]. В случае однородных кэлеровых многообразий он оказывается равен n_B, т. е. $n_{F,R} = n_{F,L} - n_B = 0$ и $n_F = n_{F,L} + n_{F,R} = n_B$. Для риччи-плоских пространств индекс равен нулю, $n_{F,L} = n_{F,R}$, откуда следует $n_F = 2n_B$, что соответствует нулевой β-функции. Формально уравнению для правых нулевых мод удовлетворяют $\psi^{\bar{\alpha}}_{R,(0)} = g^{\bar{\alpha}\beta}(\phi^{\beta}_{(0)})^*$. В случае однородных сигма-моделей можно легко убедиться, что эти моды ненормируемы. По-видимому, в риччи-плоском случае $g^{\bar{\alpha}\beta}(\phi^{\beta}_{(0)})^*$ становятся нормируемыми функциями, что, однако не так легко проверить, не зная явного вида метрики. По той же причине доказа-

---

1) Из этого следует, в частности, равенство бозонного $\prod_{\epsilon}(\epsilon^2)$ и фермионного $[\prod_{\epsilon}(+\epsilon)\prod_{\epsilon}(-\epsilon)]$ детерминантов.

тельство нон-ренормализационной теоремы [8], обеспечивающей отсутствие трехпетлевых и высших поправок к β-функции теперь требует более детального анализа. Наличие нулевых фермионных мод обеих киральностей в гиперкэлеровом случае не должно нарушить эту теорему из-за появления двух новых генераторов суперпреобразований, которые не действуют на инстантон (ср. с рассуждением в [9]). Отметим еще, что инстантонное вычисление β-функции пригодно для сигма-моделей только на компактных односвязных кэлеровых многообразиях.

Мы признательны Д.В.Алексеевскому, Ю.И.Манину, А.А.Рослому и М.А.Шифману за полезные обсуждения.

Литература

1. *Mandelstam S.* Ncl. Phys., 1983, **B213**, 149.
2. *Alvarez-Gaumé L., Freedman D.* Comm. Math. Phys., 1981, **80**, 443.
3. *Witten E.* Phys. Rev., 1977, **D16**, 2991.
4. *Гиббонс Г.В.* Сб. "Геометрические идеи в физике". М.: Мир, 1983.
5. *Alvarez-Gaumé L., Freedman D.* Phys. Rev., 1980, **D22**, 846.
6. *Yau S.T.* Comm. Pure Appl. Math., 1978, **31**, 339.
7. *Page D.N.* Phys. Lett., 1978, **B80**, 55.
8. *Novikov V.A., Shifman M.A., Vainshtein A.I., Zakharov V.I.* Preprint ITEP-188, 1983.
9. *Morozov A.Yu., Perelomov A.M., Shifman M.A.* Preprint ITEP-14, 1984.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
23 мая 1984г.